Algebra I

6. Öv. uppgifter för tisd. 16.3.2010.

1.) Låt G, H och K vara grupper, och antag att $f: G \to H$ och $h: H \to K$ är homomorfismer. Visa att den sammansatta avbildningen $h \circ f : G \to K$ är en homomorfism.

2.) Vi betraktar gruppen $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ och dess delgrupp $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$. Låt $x \in \mathbb{R}$, bestäm sidoklassen $x + \mathbb{Z}$. Bestäm också $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

3.) Låt G vara en grupp, och låt K vara en ändlig grupp vars ordning $|K|$ är ett primtal. Låt $f: G \to K$ vara en homomorfism, så att det existerar $g \in G$ för vilket $f(g) \neq e'$. (Här är e' enhetselementet i K.) Visa att f är surjektiv.

4.) Låt G och G' vara grupper, och låt $f: G \to G'$ vara en homomorfism. Vi definierar

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ g \in G \mid f(g) = e' \}.$$

($\mathrm{Ker}(f)$ är homomorfism f:s kärna, "kernel" på engelska.)

Visa att $\mathrm{Ker}(f)$ är en delgrupp av G.

5.) Låt H vara en ändlig grupp vars ordning $|H|$ är ett primtal, och låt G vara en grupp. Antag att $f: H \to G$ är en homomorfism, så att det existerar $h \in H$, $h \neq e_H$, för vilket $f(h) = e_G$. (Här betecknar e_H och e_G enhetselementen i H respektive G.) Visa att $f(h') = e_G$, för alla $h' \in H$.

6.) Låt G vara en grupp. Visa att G:s centrum

$$Z(G) = \{ h \in G \mid hg = gh \text{, för alla } g \in G \}$$

är en delgrupp av G.