Algebra I

5. Öv.upp. för tisd. 23.2. 2010.

1) Bevisa att $\sqrt{\frac{3}{2}}$ inte är ett rationellt tal.

2) Låt H vara en delgrupp av gruppen $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$, och antag att $7\mathbb{Z} \subset H$ samt att $11\mathbb{Z} \subset H$. Visa att $H = \mathbb{Z}$.

3) Bevisa att grupperna $7\mathbb{Z} = (7\mathbb{Z}, +)$ och $11\mathbb{Z} = (11\mathbb{Z}, +)$ är isomorfa.

4) Bevisa att grupperna $\mathbb{R}^*_+ = (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ och $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ <u>inte</u> är isomorfa. Bevisa också att grupperna $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ och $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ <u>inte</u> är isomorfa.

5) (i) Låt G vara en grupp, och låt $a \in G$. Visa att $H = \{ a^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ är en delgrupp av G

(ii) Låt H_1 och H_2 vara delgrupper av en grupp G. Visa att $H_1 \cap H_2$ är en delgrupp av G. Är $H_1 \cup H_2$ en delgrupp av G?

6) Låt G vara en grupp, och låt $a \in G$. Def. en avb.

$$(*) \qquad \gamma : G \longrightarrow G$$

genom att sätta $\gamma(x) = a x a^{-1}$, för alla $x \in G$. Visa att γ i $(*)$ är en isomorfism