Algebra I

4. Öv.-upp. för tisd. 16.2.2010.

1.) Bevisa att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal, dvs. att $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2.) Vi definierar en räkneoperation i mängden av alla hela tal $\mathbb{Z}$ genom

$$p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

där $p(a,b) = a - b$, för alla $a \in \mathbb{Z}$ och $b \in \mathbb{Z}$. Är denna räkneoperation, (i) associativ, (ii) kommutativ, och (iii) har den ett enhetselement?

3.) Låt S vara en icke-tom mängd, och låt $\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subset S\}$, dvs. $\mathcal{P}(S)$ är mängden av alla delmängder av S. Då är

$$q : \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S),$$

definierad genom $q(A,B) = A \cap B$, för alla $A \in \mathcal{P}(S)$ och $B \in \mathcal{P}(S)$, en räkneoperation i $\mathcal{P}(S)$. Visa att $\mathcal{P}(S)$, med denna räkneoperation, är en kommutativ monoid, men att $\mathcal{P}(S)$ inte är en grupp.

4.) Låt S och $\mathcal{P}(S)$ vara som i uppgift 3.). Då är

$$u : \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S),$$

def. genom $u(A,B) = A \cup B$, för alla $A, B \in \mathcal{P}(S)$ en räkn. op. i $\mathcal{P}(S)$. Visa att $\mathcal{P}(S)$, med denna räkn. op., är en kommutativ monoid, men inte en grupp.

5.) Låt S vara en icke-tom mängd, och låt $M(S) = \{ f : S \to S \}$, dvs. $M(S)$ är mängden av alla avbildningar från S till S. Då är $p : M(S) \times M(S) \longrightarrow M(S)$, där $p(f,g) = f \circ g$, för alla $f, g \in M(S)$, en räkneop. i $M(S)$. Visa att $M(S)$ är en monoid, och att $M(S)$ är en kommutativ monoid om och endast om S består av ett enda element.

6.) Låt S och $M(S)$ vara som i 5.), och def. $B(S) = \{ f \in M(S) \mid f \text{ är en bijektion} \}$, samt $p : B(S) \times B(S) \longrightarrow B(S)$, $(f,g) \longmapsto f \circ g$. Visa att $B(S)$ är en grupp, samt att $B(S)$ är en kommutativ grupp om och endast om S har högst två element