Algebra I

3. Öv. upp. för tisd. 9.2.2010.

1.) Låt $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ beteckna mängden av naturliga tal, och låt $\mathbb{Z}$ beteckna mängden av alla hela tal, såsom vi konstruerat på föreläsningarna. Vi definierar en avbildning

$$i: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

genom att sätta $i(a) = [a,0]$, för alla $a \in \mathbb{N}$. Visa att:

(1) i är en injektiv avbildning,

(2) $i(a+b) = i(a) + i(b)$, för alla $a, b \in \mathbb{N}$,

(3) $i(a \cdot b) = i(a) \cdot i(b)$, för alla $a, b \in \mathbb{N}$.

3.) Låt $\mathbb{Z}$ vara såsom i uppgift 1.). Vi definierar en relation $\leq$ i $\mathbb{Z}$, (en ordning i $\mathbb{Z}$), genom

$$[a,b] \leq [c,d] \Leftrightarrow a+d \leq c+b.$$

Visa att $\leq$ är en reflexiv och transitiv relation i $\mathbb{Z}$, samt att om $x, y \in \mathbb{Z}$ så gäller antingen $x \leq y$ eller $y \leq x$.

2.) Låt $\mathbb{Z}$ vara såsom i uppgift 1.) Visa att vi får en väl-definierad relation $\leq$ i $\mathbb{Z}$, ~~genom~~ genom att definiera

$$[a,b] \leq [c,d] \Leftrightarrow a+d \leq c+b,$$

dvs. visa att denna definition är oberoende av valen av representanter $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ och $(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ för ekvivalensklasserna $[a,b] \in \mathbb{Z}$ respektive $[c,d] \in \mathbb{Z}$.

4.] Låt A och B vara ideal i $\mathbb{Z}$. Vi vet enligt Sats 0.6.11 att $A+B$ är ett ideal i $\mathbb{Z}$. Visa att $A+B$ är det minsta (med avseende på "$\subset$") ideal i $\mathbb{Z}$ som innehåller både A och B, dvs. visa att $A \subset A+B$ och $B \subset A+B$, och att om C är ett ideal i $\mathbb{Z}$, och $A \subset C$ och $B \subset C$, så följer härav att $A+B \subset C$.

5.] Bestäm sgd$(1443, 13875)$.

6.] Skriv talet 13875 som en produkt av primtal.