Algebra I

11. Öv. uppg. för tisd. den 27.4.2010

1. Visa att $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$ är en delkropp av $\mathbb{R}$.

2. (i). Bestäm [redacted] alla homomorfismer $f : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$.

   (ii). Bestäm alla ringhomomorfismer $h : (\mathbb{Q}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +, [redacted]\cdot)$.

3. (i) Bestäm alla primideal i ringen $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ av alla hela tal.

   (ii) Bestäm alla maximala ideal i ringen $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ av alla hela tal.

4. Ge ett exempel på en kommutativ ring R, $R \neq \{0\}$, och ett [redacted] ideal I i R, där I är ett primideal i R, men I är inte ett maximalt ideal i R. Använd t.ex. ringen [redacted] $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, där

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad , \text{ för alla } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

och

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd) \quad , \text{ för alla } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

(Vi anser det vara bekant att $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, med ovanstående addition "+" och multiplication "$\cdot$" är en komm. ring.) Visa att [redacted] t.ex.

$$I = \{ (a, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z} \}$$

är ett ideal i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, med de önskade egenskaperna.

5. (i) Antag att R är ett heltalsområde, och låt $a, b \in R$, där $a \neq 0$ och $b \neq 0$. Visa att

$$Ra = Rb \iff \exists \text{ ett inverterbart element } u \in R, \text{ dvs } u \in R^*, \text{ så att } b = au.$$

5. (ii). Låt $f: R \to S$ vara en ringhomomorfism, där R är en kommutativ ring, $R \neq \{0\}$, och S är ett heltalsområde. Visa att $\mathrm{Ker}(f)$ är ett primideal i R.

6. Låt R vara en kommutativ ring, $R \neq \{0\}$, och antag att I och J är maximala ideal i R. Visa att antingen är $I = J$, eller så har vi att $I + J = R$.