

Mitta ja Integraal

kesä 2011
muistilista

Jan Cristina

1. Olkoon $U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}$ joukko perhe. Määritellään

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \{x : \text{on olemassa } \alpha \in \mathcal{A} \text{ siten, että } x \in U_\alpha\} \quad \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \{x : \text{kaikille } \alpha \in \mathcal{A} \ x \in U_\alpha\}.$$

2. Olkoot $A \subset \mathbb{R}$. $y \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ on A :n yläraja jos kaikille $x \in A$ $y \geq x$. z on A :n alaraja jos kaikille $x \in A$ $z \leq x$. $\sup A$ on A :n pienin yläraja, eli se on A :n yläraja ja jos w on A :n yläraja, niin $\sup A \leq w$. $\inf A$ on A :n suurin alaraja, eli se on A :n alaraja ja jos w on A :n alaraja, niin $\inf A \geq w$.
3. Joukko X on numeroituva, jos on olemassa injektio $f : A \rightarrow \mathbb{N}$. Toisin sanoen, on olemassa numerointi $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Jos joukko ei ole numeroituva, sanotaan sen olevan ylinumeroituva.

(a) Äärelliset joukot ovat numeroituvia

(b) Numeroituva yhdiste numeroituvia joukkoja on numeroituva, eli jos joukot A_1, A_2, \dots ovat kaikki numeroituvia, niin

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

on numeroituva.

(c) \mathbb{N}^k ja \mathbb{Q}^k ovat numeroituvia kaikille $k \in \mathbb{N}$.

(d) $[0, 1]$

4. $A \subset \mathbb{R}^n$ \mathbb{R}^n :n Lebesgue:n ulkomitta A :sta on $m_n^*(A) := \inf\{\mathcal{S}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesgue:n peite}\}$.

(a) \mathcal{F} on A :n Lebesgue:n peite jos se on numeroituva perhe avoimia n -välejä, siten että

$$A \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I.$$

(b) $\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \sum_{I \in \mathcal{F}} l(I)$, missä $l((a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$.

5. Ulkomitalla on seuraavat ominaisuudet

(a) $m^*(\emptyset) = 0$

(b) Jos $A \subset B$ niin $m^*(A) \leq m^*(B)$.

(c)

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^n A_n\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

6. $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos $\forall A \subset \mathbb{R}^n$

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Mikä on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

(a) Jos E_1, E_2, \dots ovat mitallisia, seuraavat joukot ovat mitallisia

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \quad E_i \setminus E_j, E_i^c.$$

(b) Jos $m^*(A) = 0$ niin A on mitallinen. Jos A on avoin tai suljettu niin se on mitallinen.

(c)

7. Funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on mitallinen jos kaikille avoimella $G \subset \mathbb{R}^n$

$$f^{-1}(G) := \{x : f(x) \in G\} \text{ on mitallinen.}$$

(a)

(b) Funktio $f : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ on mitallinen jos kaikille avoimella $G \subset \mathbb{R}$ $f^{-1}(G)$ on mitallinen, ja $f^{-1}(\{-\infty\})$ ja $f^{-1}(\{\infty\})$ ovat mitallisia.

(c) Tämä on yhtäpitävä seuraavien yhtäpitävien ehtojen kanssa

i. $\forall a \in \mathbb{R} f^{-1}([-\infty, a])$ on mitallinen;

ii. $\forall a \in \mathbb{R} f^{-1}([-\infty, a[)$ on mitallinen

iii. $\forall a \in \mathbb{R} f^{-1}([a, \infty])$ on mitallinen

iv. $\forall a \in \mathbb{R} f^{-1}(]a, \infty])$ on mitallinen

(d) Olkoot $f_1, f_2, \dots : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia, niin seuraavat funktiot ovat mitallisia

$$f_i + f_j \text{ (mikäli määritelty)} \quad f_i \cdot f_j \quad \sup_{i \geq 0} f_i \quad \inf_{i \leq 0} f_i \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i \quad \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i.$$

(e) Jos $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^k$ on mitallinen ja $g : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva niin $g \circ f$ on mitallinen.

(f) Jos $f : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$ (tai \mathbb{R}^m), $A : \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ja $f|_{B_i}$ on mitallinen kaikille i , niin f on mitallinen.

8. Sanotaan että ominaisuus $P(x)$ pätee melkein kaikille (m.k.) $x \in E$ jos on olemassa $E' \subset E$ siten, että $m(E' \setminus E) = 0$ ja kaikille $x \in E'$ pätee ominaisuus $P(x)$.

- Esimerkiksi $f = g : A \rightarrow \mathbb{R}$ melkein kaikkialla ($f \stackrel{m.k.}{=} g$) jos on olemassa $A' \subset A$ siten, että $m^*(A \setminus A') = 0$, ja $f|_{A'} = g|_{A'}$.

9. Funktio $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on yksinkertainen jos

- f on mitallinen.
- $f \geq 0$
- f saa äärellisen monta arvoa.

10. Yksinkertaisen funktion normaali esitys on $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ missä $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$. Tällöin $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^k A_i$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina kun $i \neq j$.

11. Yksinkertaisen funktion f :n yksinkertainen integraali on

$$I(f) := \sum_{i=1}^k a_i m(A_i) \quad I(f, E) := I(f \chi_E).$$

- $I(f + g) = I(f) + I(g)$
- $a > 0 \Rightarrow I(af) = aI(f)$
- $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$
- $E \subset F \Rightarrow I(f, E) \leq I(f, F)$
- $m(E) = 0 \Rightarrow I(f, E) = 0$
- Olkoon $f \geq 0$ mitallinen funktio tällöin on olemassa kasvava jono yksinkertaisia funktioita $\phi_i \nearrow f$.

12. Jos $f \geq 0$ on mitallinen funktio määritellään

$$\inf f := \sup\{I(\phi) : \phi \leq f \text{ yksinkertainen}\} \quad \int_E f := \int f \chi_E.$$

- $f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$
- $A \subset B \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$
- $f(x) = 0$ kaikille $x \in E \Rightarrow \int_E f = 0$.
- $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$
- $0 \leq a < \infty \Rightarrow \int_E af = a \int_E f$.
- $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.
- Jos E on rajoitettu ja f on Riemann integroitava yli E (ja tällöin rajoitettu), niin

$$\int_E f = \text{Riemann} \int_E f.$$

- Jos $f \geq 0$ on mitallinen ja $\int_E f = 0$ niin $f(x) = 0$ m.k. $x \in E$.
- jos $f(x) = g(k)$ m.k. $x \in E$ niin $\int_E f = \int_E g$

13. Olkoon $f : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$. $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ ja $f^-(x) := -\min\{0, f(x)\}$. $f = f^+ - f^-$
 $|f| = f^+ + f^-$. f on integroituva yli $E \subset A$ jos se on mitallinen ja $\int_E f^+ < \infty$ ja $\int_E f^- < \infty$.
Tällöin

$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

- (a) f on integroituva yli E jos ja vain jos se on mitallinen ja $\int_E |f| < \infty$.
(b) Jos f ja g ovat integroituvia, niin $f + g$ on integroituva ja

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g.$$

- (c) Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ ja f integroituva, niin λf on integroituva ja

$$\int_E \lambda f = \lambda \int_E f.$$

- (d) $f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$.
(e) $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$
(f) $f(x) = g(x)$ m.k. $x \in E \Rightarrow \int_E f = \int_E g$.

14. Konvergenssilauseet. Tällöin voidaan vaihtaa \int :n ja \lim :n paikat:

- (a) MKL: olkoot $f_i : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$ $0 \leq f_i \leq f_{i+1}$ niin

$$\int_E \lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i$$

- (b) Fatou: olkoot $f_i : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$ $0 \leq f_i$ niin.

$$\int_E \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i$$

- (c) DKL: olkoot $f_i : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$ integroituvia ja $g : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$ integroituva siten, että $|f_i| \leq g$
kaikille i , niin mikäli rajaarvot ovat olemassa

$$\int_E \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i.$$

- (d) TRKL: olkoot $f_i : A \rightarrow \dot{\mathbb{R}}$ integroituvia siten, että $|f_i| \leq a$ kaikille i , niin mikäli rajaarvot
ovat olemassa

$$\int_E \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i.$$