Mitta ja integraali
Kesä 2011
4. tehtävät
Malliratkaisut (LS)

1. Olkoon $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \ldots$ jono. Sanotaan, että $\lim_{i\to\infty} a_i = \infty$ jos kaikille $M \in \mathbb{R}$ on olemassa i_0, jolle kaikille $i \geq i_0$ pätee $a_i \geq M$. Sanotaan, että $\lim_{i\to\infty} a_i = -\infty$ jos $\lim_{i\to\infty} -a_i = \infty$. Osoita, että

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \infty \text{ jos ja vain jos } \limsup_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \infty$$

ja

$$\lim_{i\to\infty} a_i = -\infty \text{ jos ja vain jos } \limsup_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = -\infty$$

Ratkaisu. Osoitetaan ensin ensimmäinen väite. Olkoon $M > 0$.

Oletetaan $\lim a_i = \infty$. Nyt löytyy $i_0 \in \mathbb{N}$, jolle kaikilla $i \geq i_0$ pätee $a_i > M$. Erityisesti tällöin $\inf_{i\geq i_0} a_i > M$. Siis $\inf_{i\geq k} a_i > M$ kaikilla $k \geq i_0$. Siis $\liminf a_i = \infty$. Lisäksi nyt $\limsup a_i \geq \liminf a_i$, joten $\limsup_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \infty$.

Oletetaan sitten $\limsup_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \infty$. Nyt löytyy $i_0 \in \mathbb{N}$, jolle $\inf_{i\geq i_o} > M$. Siis kaikilla $i \geq i_0$ pätee $a_i > M$, joten $\lim a_i = \infty$.

Nyt jos $\lim a_i = -\infty$, niin $\lim -a_i = \infty$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\limsup_{i\to\infty} -a_i = \liminf_{i\to\infty} -a_i = \infty$, tai siis $-\limsup_{i\to\infty} a_i = -\liminf_{i\to\infty} a_i = \infty$. Siis toinenkin väite pätee.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Määritellään A:n *sisäpisteitten joukko* $A^\circ := \bigcup_{U\in\mathcal{U}_A} U$ missä $\mathcal{U}_A := \{U \subset \mathbb{R}^n : U \text{ avoin ja } U \subset A\}$; intuitiivisesti ”suurin avoin joukko, joka sisältyy A:han”. Määritellään A:n sulkeuma $\overline{A} := \bigcap_{F\in\mathcal{F}_A} F$ missä $\mathcal{F}_A := \{F \subset \mathbb{R}^n : F \text{ on suljettu ja } A \subset F\}$; intuitiivisesti ”pienin suljettu joukko, joka sisältää A:n”. Määritellään A:n reuna $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$. Osoita, että jos $m^*(\partial A) = 0$, niin A on mitallinen.

Ratkaisu. Nyt $A = A \cup (A^\circ \cap \partial A)$, missä A° on avoimena mitallinen, ja $A \cap \partial A \subset \partial A$, joten se on nollamittaisen joukon osajoukkona nollamittainen ja siten mitallinen (Lebesguen mitta on täydellinen). Siis A on kahden mitallisen joukon yhdisteenä mitallinen.

Vaihtoehtoisesti ratkaisussa voi käyttää harjoitusten 2 tehtävää 8, sillä

$$A^\circ = A^\circ \setminus \partial A \subset A \subset A^\circ \cup \partial A.$$

3. Olkoot $f, g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia. Osoita, että $f \cdot g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ on mitallinen.

Ratkaisu. Merkitään $A_0 = f^{-1}\mathbb{R} \cap g^{-1}\mathbb{R}$, jolloin A_0 on mitallisten joukkojen leikkauksena mitallinen. Nyt kuvaus $(f, g) : A_0 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on mitallinen, sillä molemmat komponenttikuvaukset ovat mitallisia. Koska lisäksi kuvaus $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, on yhdistetty kuvaus $u \circ (f, g) : A_0 \to \mathbb{R}$ mitallinen.

Merkitään $h = fg : A \to \dot{\mathbb{R}}$. Olkoon $G \subset \mathbb{R}$ avoin joukko, jolle $0 \notin G$. Nyt jos $x \in h^{-1}(G)$, niin $h(x) = f(x)g(x) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tällöin $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$, joten $h^{-1}(G) \subset A_0$, joten, koska $h|_{A_0} = u\circ(f,g)$, on

$$h^{-1}(G) = (u \circ (f,g))^{-1}(G),$$

ja siten mitallinen. Toisaalta

$$\begin{aligned} h^{-1}\{\infty\} &= (f^{-1}\{\infty\} \cap g^{-1}(0,\infty]) \cup (g^{-1}\{\infty\} \cap f^{-1}(0,\infty]) \\ &\cup (f^{-1}\{-\infty\} \cap g^{-1}[-\infty,0)) \cup (g^{-1} - \infty \cap f^{-1}[-\infty,0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^{-1}\{-\infty\} &= (f^{-1}\{-\infty\} \cap g^{-1}(0,\infty]) \cup (g^{-1}\{-\infty\} \cap f^{-1}(0,\infty]) \\ &\cup (f^{-1}\{\infty\} \cap g^{-1}[-\infty,0)) \cup (g^{-1}\{\infty\} \cap f^{-1}[-\infty,0)), \end{aligned}$$

ja

$$h^{-1}\{0\} = f^{-1}\{0\} \cup g^{-1}\{0\}$$

ovat funktioitten f ja g mitallisuuden nojalla mitallisia. Jos nyt $G \subset \mathbb{R}$ on avoin, niin $h^{-1}(G) = h^{-1}(G \setminus \{0\}) \cup h^{-1}(G \cap \{0\})$ on mitallinen. Siis $h = fg$ on mitallinen.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, mitallinen ja $f_j : A \to \mathbb{R}$ $j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia funktioita. Osoita, että joukot

$$A_j = \{x \in A : f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$$

ovat mitallisia.

Ratkaisu. Koska $f(x) \in \mathbb{R}$ kaikilla $x \in A$, pätee

$$A_j = \{x \in A : f_{j+1}(x) > f_j(x)\} = \{x \in A : f_{j+1}(x) - f_j(x) > 0\} = (f_{j+1} - f_j)^{-1}(0,\infty).$$

Nyt $f_{j+1} - f_j$ on mitallisten funktioitten summana mitallinen, joten A on mitallinen.

5. Olkoot A ja $f_j : A \to \mathbb{R}$ kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että joukko

$$\{x \in A : \text{ jono } (f_j(x))_{j=1}^{\infty} \text{ on aidosti kasvava}\}$$

on mitallinen.

Ratkaisu. Olkoot joukot A_j kuten edellisessä tehtävässä. Koska $f(x) \in \mathbb{R}$ kaikilla $x \in A$, pätee

$$\{x \in A : \text{ jono } (f_j(x))_{j=1}^{\infty} \text{ on aidosti kasvava}\} = \{x \in A : f_{j+1}(x) > f_j(x)\, \forall j \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$$

Siis tehtävän joukko on mitallisten joukkojen numeroituvana leikkauksena mitallinen.

6. Sanotaan että funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kasvava jos $g(x) \leq g(y)$ aina kun $x \leq y$. Osoita, että kasvava funktio on mitallinen.

Ratkaisu. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Nyt riittää näyttää, että $g^{-1}(-\infty, a)$ on mitallinen. Voidaan olettaa, että $g^{-1}(-\infty, a) \neq \emptyset$ ja $g^{-1}(-\infty, a) \neq \mathbb{R}$, sillä muutoin se olisi mitallinen. Nyt $g^{-1}(-\infty, a)$ on ylhäältä rajoitettu, sillä muuten kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $x \in g^{-1}(-\infty, a)$, jolloin $g^{-1}(-\infty, a) = \mathbb{R}$. Siis löytyy $M := \sup g^{-1}(-\infty, a) \in \mathbb{R}$.

Jos $x \in g^{-1}(-\infty, a)$, niin on $x \leq M$. Siis $g^{-1}(-\infty, a) \subset (-\infty, M]$. Toisaalta jos $x \in (-\infty, M)$. niin löytyy $y \in g^{-1}(-\infty, a)$, jolle $x < y < M$. Koska funktio g on kasvava, niin $g(x) \leq g(y) < a$, jolloin $(-\infty, M) \subset g^{-1}(-\infty, a)$. Siis $g^{-1}(-\infty, a)$ on joko $(-\infty, M)$ tai $(-\infty, M]$, ja siten joko avoimena tai suljettuna joukkona mitallinen.

7. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kasvava. Osoita, että $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

Ratkaisu. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Nyt $(g \circ f)^{-1}(-\infty, a) = f^{-1}(g^{-1}(-\infty, a))$, missä $g^{-1}(-\infty, a) = (-\infty, M)$ tai $g^{-1}(-\infty, M]$ edellisen tehtävän merkinnöillä. Tällöin $(g \circ f)^{-1}(-\infty, a) = f^{-1}(-\infty, M)$ tai $(g \circ f)^{-1}(-\infty, a) = f^{-1}(-\infty, M]$, jotka ovat mitallisia funktion f mitallisuuden nojalla. Siis $g \circ f$ on mitallinen.

8. Olkoot $f_1, f_2, \ldots$ jono mitallisia funktioita $A \to \mathbb{R}$, missä $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että joukko $B = \{x \in A : \lim_{j \to \infty} f_j(x) \text{ on olemassa}\}$ on mitallinen.

Ratkaisu. Merkitään

$$C = ((\limsup f_j)^{-1}\{\infty\} \cap (\liminf f_j)^{-1}\{\infty\}) \cup ((\limsup f_j)^{-1}\{-\infty\} \cap (\liminf f_j)^{-1}\{-\infty\});$$

C on selvästi mitallinen. Määritellään funktio $g : A \to \mathbb{R}$ asettamalla $g(x) = 0$, kun $x \in C$, ja $g(x) = \limsup f_j(x) - \liminf f_j(x)$ muuten. Nyt funktio g on mitallinen, sillä sen rajoittumat joukkoihin C ja $A \setminus C$ ovat mitallisia; C:ssä funktio on vakiofunktiona jatkuva, ja $A \setminus C$:ssä se on mitallisten funktioiden summa. Nyt

$$B = g^{-1}\{0\} = g^{-1}(-\infty, 0] \cap g^{-1}[0, \infty),$$

joten se on mitallisten joukkojen leikkauksena mitallinen.

9. Etsi funktion $f = \sqrt{2}\chi_{[0,\pi]} + 5\chi_{[\pi/2,6]} + 3\chi_{\mathbb{Q}}$ normaaliesitys ja laske sen integraali.

Ratkaisu. Nyt

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{kun } x \in [0, \pi/2) \setminus \mathbb{Q} =: A_1 \\ \sqrt{2} + 3, & \text{kun } x \in [0, \pi/2) \cap \mathbb{Q} =: A_2 \\ \sqrt{2} + 5, & \text{kun } x \in [\pi/2, \pi] \setminus \mathbb{Q} =: A_3 \\ \sqrt{2} + 8, & \text{kun } x \in [\pi/2, \pi] \cap \mathbb{Q} =: A_4 \\ 5, & \text{kun } x \in (\pi, 6] \setminus \mathbb{Q} =: A_5 \\ 8, & \text{kun } x \in (\pi, 6] \cap \mathbb{Q} =: A_6 \\ 3, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \setminus [0, 6] =: A_7 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Funktion f normaaliesitykseksi saadaan

$$f = \sqrt{2}\chi_{A_1} + (\sqrt{2}+3)\chi_{A_2} + (\sqrt{2}+5)\chi_{A_3} + (\sqrt{2}+8)\chi_{A_4} + 5\chi_{A_5} + 8\chi_{A_6} + 3\chi_{A_7}.$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f &= \sqrt{2}m(A_1) + (\sqrt{2}+3)m(A_2) + (\sqrt{2}+5)m(A_3) + (\sqrt{2}+8)m(A_4) + 5m(A_5) + 8m(A_6) + 3m(A_7) \\
&= \sqrt{2}\frac{\pi}{2} + (\sqrt{2}+5)\frac{\pi}{2} + 5(6-\pi) \\
&= 30 + (\sqrt{2} - \frac{5}{2})\pi.
\end{aligned}$$

10. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja. Oletetaan, että jokainen $\mathbb{R}^n$:n piste kuuluu korkeintaan p:hen joukkoon A_j. Osoita käyttämällä yksinkertaisia funktioita, että

$$p\, m\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \geq \sum m(A_j).$$

Ratkaisu. Oletuksen nojalla pätee $\sum_{j=1}^{k} m(A_j) \leq p$. Koska lisäksi $m(A) = \int \chi_A$, integraalin lineaarisuudesta yksinkertaisille funktioille saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} m(A_j) &= \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_j} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_j} \\
&\leq p \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\bigcup_i A_i} \\
&= p\, m\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right).
\end{aligned}$$

11. Olkoon $0 < s < 1$. Osoita, että voit käyttää MKL:ta laskemaksesi seuraavan raja-arvon

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}$$

ja laske se.

Ratkaisu. Selvästi funktiot f_j ovat epänegatiivisia integrointivälillä. Ne ovat mitallisia, sillä jakaja eroaa nollasta kaikilla $x \in [0,1]$, minkä vuoksi funktiot ovat jatkuvia. Lisäksi

$$f_j(x) = \frac{x^s}{\frac{1}{n} + x} \leq \frac{x^s}{\frac{1}{n+1} + x} = f_{j+1}(x),$$

joten funktiojono on kasvava. Siis monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx} &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{nx^s}{1+nx} \\ &= \int_0^1 x^{s-1}\end{aligned}$$

Nyt funktiot $\chi_{[\frac{1}{j},1]}$ muodostavat kasvavan jonon mitallisia, epänegatiivisia funktioita. Edelleen funktiot $x^{s-1}\chi_{[\frac{1}{j},1]}$ muodostavat kasvavan jonon mitallisia, epänegatiivisia funktioita, joten voidaan käyttää uudestaan MKL:ta:

$$\int_0^1 x^{s-1} = \lim_{j\to\infty}\int_{\frac{1}{j}}^1 x^{s-1} = \frac{1}{s}.$$