Mitta ja integraali
Kesä 2011
2. tehtävät
Malliratkaisut (LS)

1. Olkoot $\varnothing \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Osoita, että

$$\inf A \leq \inf B \quad \text{ja} \quad \sup A \geq \sup B$$

Ratkaisu. Olkoon M joukon A yläraja. Tällöin kaikilla $a \in A$ pätee $a \leq M$, joten erityisesti kaikilla $b \in B$ pätee $b \leq M$. Siis jokainen A:n yläraja on myös B:n yläraja, joten erityisesti $\sup A$ on B:n yläraja, jolloin supremumin määritelmän perusteella $\sup A \geq \sup B$.
Vastaavasti jokainen A:n alaraja on myös B:n alaraja, jolloin infimumin määritelmän nojalla $\inf A \leq \inf B$.

2. Osoita, että avoin n-väli on avoin joukko.

Ratkaisu. Olkoon $I = \Pi_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}^n$ avoin n-väli. Olkoon $x = (x_1, \ldots, x_n) \in I$. Koska välit (a_i, b_i) ovat avoimia, löytyy reaaliluvut $r_i > 0$, joille $(x_i - r_i, x_i + r_i) \subset (a_i, b_i)$, $1 \leq i \leq n$. Merkitään $r = \min\{r_i : 1 \leq i \leq n\}$ ja osoitetaan $B := B_n(x, r) \subset I$.
Tehdään vastaoletus: löytyy $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B \setminus I$. Erityisesti tällöin löytyy $j \leq n$, jolle $y_j \notin (a_j, b_j)$. Nyt

$$||x - y|| \geq |x_j - y_j| \geq \min\{|x_j - a_j|.|b_j - x_j|\} \geq r,$$

jolloin $y \notin B$. Siis täytyy olla $B \subset I$, joten I on avoin.

3. Olkoon A avoin joukko, ja $x \in A$. Osoita, että on olemassa avoin n-väli I siten, että $x \in I \subset A$.

Ratkaisu. Olkoon $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$. Joukko A on avoin, joten löytyy $r > 0$, jolle $B(x, r) \subset A$. Merkitään $\varepsilon = \frac{r}{\sqrt{n}}$ ja määritellään $I = \Pi_{i=1}^{n}(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$. Selvästi $x \in I$. Osoitetaan $I \subset B(x, r)$. Olkoon $y = (y_1, \ldots, y_n) \in I$. Tällöin

$$||x - y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{\frac{r}{\sqrt{n}} \cdot n} = r$$

Siis $y \in B(x, r)$, ja siten $I \subset B(x, r) \subset A$.

4. Olkoon $I = \,]q_1, p_1[\, \times \,]q_2, p_2[\, \times \cdots \times \,]q_n, p_n[$ avoin n-väli. Jos q_i, $p_i \in \mathbb{Q}$, kutsutaan väliä I *rationaaliseksi n-väliksi.* Olkoon $J \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen avoin n-väli. Osoita, että millä tahansa $x \in J$ on olemassa rationaalinen n-väli I siten, että $x \in I \subset J$.

Ratkaisu. Kirjoitetaan $J = \Pi_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$. Olkoon $x = (x_1, \ldots, x_n) \in J$. Koska rationaaliluvut ovat tiheässä reaalisuoralla, kaikilla $i \leq n$ löytyy rationaaliluvut p_i, q_i, joille

$$a_i < p_i < x_i < q_i < b_i.$$

Määritellään $I = \Pi_{i=1}^{n}(p_i, q_i)$, jolloin selvästi $x \in I \subset J$.

5. Soveltamalla samoja menetelmiä kuin tehtäväsarjan 1 tehtävissä 16 ja 17 ja tämän tehtäväsarjan kahta edellistä tehtävää, osoita, että mikä tahansa $\mathbb{R}^n$:n avoin joukko A voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä avoimista n-väleistä. Toisin sanoen löytyy numeroituva joukkoperhe $\mathcal{Q}$ avoimia n-välejä siten, että

$$\bigcup_{I \in \mathcal{Q}} I = A.$$

Ratkaisu. Merkitään $\mathcal{Q} = \{I = \Pi_{i=1}^{n}(p_i, q_i) : I \subset A, p_i, q_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq n\}$ ja osoitetaan, että se toteuttaa vaaditut ehdot. Nyt jokainen $I \in \mathcal{Q}$ voidaan samaistaa johonkin joukon $\mathbb{Q}^{2n}$ alkioon kuvauksella $I \mapsto (p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$. Tämä on välttämättä injektio, joten $\mathcal{Q}$ voidaan samaistaa numeroituvan joukon osajoukkoon, ja on siten numeroituva.
Joukon $\mathcal{Q}$ valinnan perusteella $\bigcup \mathcal{Q} \subset A$. Toisaalta kahden edellisen tehtävän nojalla jokaisella $x \in A$ löytyy rationaalinen n-väli I, jolle $x \in I \subset A$. Mutta nyt $I \in \mathcal{Q}$, joten $A \subset \bigcup \mathcal{Q}$. Siis A numeroituva yhdiste avoimia n-välejä.

6. Olkoon $E_1, \ldots, E_k \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja. Käyttämällä luennoissa todistettua tietoa siitä, että kahden mitallisen joukon, E:n ja F:n yhdiste $E \cup F$ on mitallinen, osoita, että

$$\bigcup_{j=1}^{k} E_j$$

on mitallinen.

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla. Luentojen perusteella väite pätee kahdelle joukolle. Tehdään induktio-oletus, että $\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$ on mitallinen. Mutta nyt $\bigcup_{j=1}^{k} E_j = \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \cup E_k$, jolloin induktio-oletuksen nojalla $\bigcup_{j=1}^{k} E_j$ on kahden mitallisen joukon yhdisteenä mitallinen. Siis induktioperiaatteen nojalla väite pätee.

7. Olkoon $E_1, \ldots, E_k \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja. Käyttämällä luennoissa todistettua tietoa siitä, että kahden mitallisen joukon, E:n ja F:n leikkaus $E \cap F$ on mitallinen, osoita, että

$$\bigcap_{j=1}^{k} E_j$$

on mitallinen.

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla. Luentojen perusteella väite pätee kahdelle joukolle. Tehdään induktio-oletus, että $\bigcap_{j=1}^{k-1} E_j$ on mitallinen. Mutta nyt $\bigcap_{j=1}^{k} E_j = \bigcap_{j=1}^{k-1} E_j \cap E_k$, jolloin induktio-oletuksen nojalla $\bigcap_{j=1}^{k} E_j$ on kahden mitallisen joukon yhdisteenä mitallinen. Siis induktioperiaatteen nojalla väite pätee.

8. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja, missä $m(B) = 0$. Olkoon E sellainen joukko, että $A \setminus B \subset E \subset A \cup B$. Osoita, että löytyy joukot C ja D, joilla $E = C \cup D$, C on mitallinen ja $m^*(D) = 0$. Päättele tästä, että E on mitallinen.

Ratkaisu. Merkitään $C = A \setminus B$ ja $D = B \cap E$ ja osoitetaan, että näillä valinnoilla vaaditut ehdot toteutuvat. Selvästi $C \cup D \subset E$. Jos puolestaan $x \in E$, niin $x \in A \setminus B$ tai $x \in B \cap E$, sillä muuten $x \notin A \cup B$, jolloin ei voi olla $x \in E$. Siis $E = C \cup D$.
Lisäksi C on kahden mitallisen joukon erotuksena mitallinen ja D nollamittaisen joukon osajoukkona nollamittainen, ja siten erityisesti mitallinen. Siis E on kahden mitallisen joukon yhdisteenä mitallinen.

9. Olkoot A, B ja E kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että $m(E) = m(A)$.

Ratkaisu. Joukot A, B ja E ovat mitallisia, joten Carathéodoryn ehdon, mitan monotonisuuden ja subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} m(A) = m(A \setminus E) + m(A \cap E) &= m(A \cap E) \\ &\leq m(E) \\ &\leq m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) = m(A). \end{aligned}$$

Siis $m(A) = m(E)$.

10. Olkoot $E_1, E_2, \ldots$ mitallisia joukkoja $\mathbb{R}^n$:ssä jolla $m(E_i \cap E_j) = 0$ aina kun $i \neq j$. Osoita, että joukko $G = \bigcup_{i \neq j} E_i \cap E_j$ on nollamittainen (eli $m(G) = 0$) ja että on olemassa mitalliset, erilliset joukot $F_1, F_2, \ldots$ (eli $F_i \cap F_j = \varnothing$ aina kun $i \neq j$) siten, että

$$F_i = E_i \setminus G \quad \text{ja} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = G \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Ratkaisu. Olkoon G kuten tehtävänannossa. Leikkaukset $E_i \cap E_j$ ovat mitallisten joukkojen leikkauksina mitallisia. Lisäksi, koska luonnollisten lukujen muodostamien parien joukko $\mathbb{N}^2$ on numeroituva, on $G = \{E_i \cap E_j : (i,j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j\}$ numeroituvana yhdisteenä mitallisia joukkoja mitallinen. Erityisesti tällöin subadditiivisuuden nojalla

$$0 \leq m(G) = m(\bigcup_{i \neq j} E_i \cap E_j) \leq \sum_{i \neq j} m(E_i \cap E_j) = 0.$$

Siis G nollamittainen.
Määritellään sitten kaikilla $i \in \mathbb{N}$ $F_i = E_i \setminus G$ ja osoitetaan, että näin määritellyille joukoille pätevät tehtävässä vaaditut ehdot. Selvästi F_i mitallisten joukkojen erotuksena mitallinen kaikilla i. Jos löytyisi $x \in F_i \cap F_j$ joillakin $i, j \in \mathbb{N}$, niin pätisi myös $x \in (E_i \setminus G) \cap (E_j \setminus G)$, jolloin $x \in E_i \cap E_j$. Mutta tällöin $x \in G$ ja $x \notin G$, joten joukkojen F_i täytyy olla erilliset.
Olkoon $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Tällöin $x \in E_i$ joko yhdellä tai vähintään kahdella indeksillä $i \in \mathbb{N}$. Jos $x \in E_i$ kahdella indeksillä $i = j, k$, niin $x \in E_j \cap E_k$, joten $x \in G$. Vastaavasti, jos $x \in E_i$ vain yhdellä i, niin $x \notin G$, jolloin $x \in F_i$ samalla i. Siis $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset G \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Sisältyminen toiseen suuntaan seuraa joukkojen G ja F_i määritelmistä. Siis $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = G \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Siis joukot F_i toteuttavat vaaditut ehdot.

11. Todista edellisen tehtävän ehdoilla, että

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Ratkaisu. Olkoot joukot E_i, F_i ja G kuten edellisessä tehtävässä. Nyt joukkojen F_i konstruktion perusteella F_i ja G ovat erillisiä kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Lisäksi joukon G mitallisuuden ja joukkojen F_i määritelmän nojalla kaikilla $i \in \mathbb{N}$ pätee

$$m(E_i) = m(E_i \cap G) + m(E_i \setminus G) = m(E_i \setminus G) = m(F_i),$$

sillä joukko $E_i \cap G$ on nollamittaisen joukon osajoukkona nollamittainen.
Nyt saadaan täysadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) &= m(G \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \\ &= \underbrace{m(G)}_{=0} + \sum_{i=1}^{\infty} m(F_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i). \end{aligned}$$

12. Osoita käyttäen tämän tehtäväsarjan tehtävän 5 tulosta, että avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia.

Ratkaisu. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Nyt tehtävän 5 nojalla joukko A voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä avoimia n-välejä. Toisaalta luentojen perusteella avoimet n-välit ovat mitallisia, joten joukko A on numeroituvana yhdisteenä mitallisia joukkoja mitallinen.
Olkoon sitten $F \subset \mathbb{R}^n$ suljettu. Nyt F^c on avoin, ja siten edellisen kohdan nojalla mitallinen. Siis F on mitallisen joukon komplementtina mitallinen.