Mitta ja Integraali
Kesä 2011
3. tehtävät
Esimerkkiratkaisuja, Kaarlo Reipas

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että kaikille $m \in \mathbb{N}$ on olemassa avoin joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset B$ ja

$$m_n(B) \leq m_n^*(A) + \frac{1}{m}.$$

Ratkaisu. Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$. Joukon A ulkomitan määritelmän nojalla löytyy A:n Lebeguen peite $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\}$, jolla $S(\mathcal{F}) \leq m^*(A) + \frac{1}{m}$. $\mathcal{F}$ koostuu avoimista joukoista, joten $\bigcup_{I \in \mathcal{F}} I$ on avoin. Olkoon $B = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I$. Subadditiivisuuden nojalla

$$m^*(B) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k) = S(\mathcal{F}),$$

joten B toteuttaa vaaditun ehdon.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että on olemassa mitallinen joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että

$$A \subset B \quad \text{ja} \quad m(B) = m^*(A)$$

Ratkaisu. Edellisen tehtävän nojalla löytyy avoimet joukot B_k, $k \in \mathbb{N}_+$, joilla $A \subset B_m$ ja

$$m(B) \leq m^*(A) + \frac{1}{m}.$$

Olkoon nyt

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Joukot B_k ovat avoimia, ja siten mitallisia, joten niiden numeroituva leikkaus B on mitallinen. Monotonisuuden nojalla mille tahansa $k \in \mathbb{N}_+$ pätee

$$m(B) \leq m(B_k) \leq m^*(A) + \frac{1}{k},$$

joten $m(B) \leq m(A)$. Lisäksi $A \subset B$, joten monotonisuuden nojalla $m(B) \geq m^*(A)$. Siispä $m(B) = m^*(A)$, joten joukko B toteuttaa halutut ominaisuudet.

3. Olkoon $A = [0, \infty[\subset \mathbb{R}$. Osoita, että kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $B \subset \mathbb{R}$ siten, että $A \subset B$ ja $m(B \setminus A) > \epsilon$. Päteekö

$$m(B) \leq m(A) + \epsilon?$$

Miksi?

Ratkaisu. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $B = \mathbb{R}$. Tällöin B on avoin, $A \subset B$, ja $m(B \setminus A) = m(]-\infty, 0[) = \infty > \epsilon$. Epäyhtälö

$$m(B) \leq m(A) + \epsilon$$

pätee, sillä oikea puoli on ∞.

4. Olkoon A mitallinen ja $m(A) < \infty$. Osoita, että kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko B siten, että $A \subset B$ ja

$$m(B \setminus A) < \epsilon.$$

Ratkaisu. Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoon $m > \frac{1}{\epsilon}$. Tehtävän 1 nojalla voidaan valita avoin joukko $B \supset A$, jolla $m(B) \leq m(A) + \frac{1}{m} < \epsilon$. Koska A on mitallinen ja $B \cap A = A$,

$$m(B) = m(B \cap A) + m(B \setminus A) \quad \text{joten} \quad m(B \setminus A) = m(B) - m(A) < \epsilon.$$

Täten joukko B toteuttaa halutut ominaisuudet.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen. Merkitään $A_m = A \cap B(0, m)$. Olkoon B_m avoin siten että $A_m \subset B_m$ ja olkoon $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Osoita, että

$$B \setminus A \subset \bigcup_{m=1} (B_m \setminus A_m).$$

Valitsemalla joukot B_m sopivasti, osoita että kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa B siten, että $m(A \setminus B) < \epsilon$.

Ratkaisu. Olkoon $x \in B \setminus A$. Tällöin $x \in B$, joten jollain B_m $x \in B_m$. Koska $x \notin A$, millään k ei päde $x \in A_k$, erityisesti tämä ei päde luvulla m. Siis $x \in B_m \setminus A_m$, joten $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(B_m \setminus A_m)$.
Olkoon nyt $\epsilon > 0$. Tehtävän 1 nojalla voidaan jokaisella $m \in \mathbb{N}_+$ valita avoin joukko B_m siten, että

$$m(B_m) \leq m(A_m) + 2^{-m}\epsilon.$$

Olkoon $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Tällöin monotonisuuden ja subadditiivisuuden nojalla

$$m(B \setminus A) \leq m\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (B_m \setminus A_m)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(B_m \setminus A_m) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\epsilon = \epsilon.$$

Huomautus. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukkoja. Määritellään seuraavat joukot:

$$\liminf_{j\to\infty} A_j := \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k\right) \qquad \limsup_{j\to\infty} A_j := \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right)$$

Näillä joukoilla on intuitiiviset merkitykset: $x \in \liminf_{j\to\infty} A_j$ tarkoittaa, että x kuuluu kaikkiin joukkoihin A_j jostain indeksistä lähtien, ja $x \in \limsup_{j\to\infty} A_j$ tarkoittaa, että x kuuluu äärettömän moneen joukoista A_j. Mieti miksi (ei ole tehtävä).

6. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\liminf_{j\to\infty} A_j \subset \limsup_{j\to\infty} A_j$.

Ratkaisu. Olkoon $x \in \liminf_{j\to\infty} A_j$. Tällöin on olemassa jokin luku M, jolla $x \in A_j$, aina kun $j \geq M$. Olkoon $m \in \mathbb{N}_+$ mielivaltainen. Valitaan $j = \max(m, M)$. Tällöin $j \geq M$, joten $x \in A_j$, ja siis $x \in \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$. Koska m oli mielivaltainen, niin

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right).$$

7. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ joukkoja, joille

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) < \infty.$$

Mitä voit sanoa seuraavasta raja-arvosta?

$$\lim_{m\to\infty} m^*\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\right).$$

Entä $m^*(\limsup_{j\to\infty} A_j)$:sta? Mikäli olet vastannut oikein, olet todistanut Borel-Cantelli lemman.

Ratkaisu. Kysytty raja-arvo on 0, sillä millä tahansa $m > 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = \sum_{j=1}^{m-1} m^*(A_j) + \sum_{j=m}^{\infty} m^*(A_j),$$

joten

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) - \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m-1} m^*(A_j) = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=m}^{\infty} m^*(A_j),$$

eli $\lim_{m\to\infty}\sum_{j=m}^{\infty} m^*(A_j) = 0$. Subadditiivisuuden nojalla

$$0 \le m^*\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=m}^{\infty} m^*(A_j)$$

joten

$$0 \le \lim_{m\to\infty} m^*\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\right) \le 0 \quad \text{eli} \quad \lim_{m\to\infty} m^*\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\right) = 0.$$

Borel-Cantelli -lemma sanoo, että mikäli tehtävän oletukset pätevät, niin $m^*(\limsup_{j\to\infty} A_j) = 0$, eli että ainoastaan nollamittainen joukko alkioita esiintyy äärettömän monessa jonon joukossa. Koska millä tahansa $m \in \mathbb{N}_+$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \subset \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k,$$

niin

$$m^*\left(\limsup_{m\to\infty} A_m\right) \le m^*\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \to 0,$$

joten $m^*\left(\limsup_{m\to\infty} A_m\right) = 0$.

8. Olkoot $A_j : j \in J$ mitallisia, erillisiä joukkoja joille pätee $m(A_j) > 0$ kaikille $j \in J$. Osoita, että joukko $\{j : m(A_j \cap B(0,n)) > 0\}$ on numeroituva. Todista tämän avulla, että J on numeroituva.

Ratkaisu. Olkoon $m \in \mathbb{N}_+$. Merkitään

$$J_m = \{j \in J : m(A_j \cap B(0,n)) > 0\}.$$

$B(0,m) \subset \prod_{k=1}^{n}]-m,m[$, joten

$$m(B(0,m)) \le m\left(\prod_{k=1}^{n}]-m,m[\right) = (2m)^n < \infty.$$

Koska jokaisella $i \in J$, $A_j \cap B(0,m) \subset B(0,m)$, niin

$$\bigcup_{j\in J_m} (A_j \cap B(0,m)) \subset B(0,m).$$

Joukot A_j ovat erillisiä ja mitallisia, joten niin ovat myös joukot $A_j \cap B(0,m)$. Täten täysadditiivisuuden nojalla

$$\sum_{j \in J_m} m\left(A_j \cap B(0,m)\right) \leq m\left(\bigcup_{j \in J_m} \left(A_j \cap B(0,m)\right)\right) \leq m(B(0,m)) < \infty.$$

Koska summan $\sum_{j \in J_m} m\left(A_j \cap B(0,m)\right)$ jäsenet ovat joukkojen J_m määritelmän mukaan positiivisia, on indeksijoukon J_m oltava numeroituva. Ensimmäisen viikon laskuharjoituksissa nimittäin todistettiin, että ylinumeroituva summa positiivisista luvuista on välttämättä ääretön.
Koska jokainen joukko A_j voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \left(A_j \cap B(0,m)\right),$$

ja oletuksen nojalla joukot A_j olivat positiivimittaisia, on millä tahansa j oltava $m(A_j \cap B(0,m)) > 0$ jollain m, eli $J = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m$.
Täten joukko J on numeroituvien joukkojen numeroituvana yhdisteenä numeroituva.

9. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}^n$ mitallinen. Osoita, että

$$\{x \in \mathbb{R}^n : m(f^{-1}\{x\}) > 0\}$$

on numeroituva joukko.

Ratkaisu. Edellisen tehtävän nojalla riittää näyttää, että joukot $A_i = f^{-1}\{i\}$ ovat erillisiä. Tehdään vastaoletus: joillain $i \in \mathbb{R}^n$ ja $j \in \mathbb{R}^n$, $A_i \cap A_j$ on epätyhjä, eli löytyy $x \in A_i \cap A_j$, $i \neq j$. Tällöin $x \in f^{-1}\{i\}$ ja $x \in f^{-1}\{j\}$, joten x kuvautuu sekä alkioksi i, että alkioksi j. Tämä on tietysti ristiriita, joten joukot A_i ovat erillisiä. Nyt edellisen tehtävän nojalla joukon $\{x \in \mathbb{R}^n : m(f^{-1}\{x\}) > 0\}$ on oltava numeroituva.

10. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jatkuva. Osoita, että f on mitallinen.

Ratkaisu. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^m$ avoin. Funktion f jatkuvuuden nojalla joukko $f^{-1}A$ on avoin, joten se on mitallinen. Avointen joukkojen alkukuvat ovat siis mitallisia, joten f on mitallinen.

11. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ $m^*(A) > 0$ ja $f : A \to]0, \infty[$ kuvaus. Osoita, että on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että joukolla

$$A_k := \{x \in A : f(x) > 1/k\}$$

on positiivinen ulkomitta.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: jokainen joukoista A_k on nollamittainen. Koska jokainen joukon A alkio kuuluu johonkin joukoista A_k, niin $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Joukko A on siis numeroituva yhdiste nollamittaisista joukoista, joten se on itsekin nollamittainen. Tämä on tietysti ristiriita, joten jokin joukoista A_k on ulkomitaltaan positiivinen.

12. Olkoon $A, B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ joukkoja siten että $A = \bigcup_i B_i$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ kuvaus. Osoita, että jos $f|_{B_i}$ (funktion f rajoittuma joukkoon B_i) on mitallinen kaikille i, niin $f : A \to \mathbb{R}$ on myös mitallinen.

Ratkaisu. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Tällöin

$$\begin{aligned}
f^{-1}G &= \{x \in A : f(x) \in G\} \\
&= \left\{ x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k : f(x) \in G \right\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in B_k : f(x) \in G\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in B_k : f|_{B_k}(x) \in G\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} (f|_{B_k})^{-1}\, G.
\end{aligned}$$

Rajoittumien $f|_{B_i}$ mitallisuuden nojalla $(f|_{B_k})^{-1}\, G$ on mitallinen jokaisella $k \in \mathbb{N}_+$, joten $f^{-1}G$ on mitallisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä mitallinen. Siis f on mitallinen kuvaus.