Mitta ja integraali
Kesä 2011
2. tehtävät
palautus 26.05.2011 klo 16 00

1. Olkoot $\varnothing \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Osoita, että

$$\inf A \leq \inf B \quad \text{ja} \quad \sup A \leq \sup B$$

2. Osoita, että avoin n-väli on avoin joukko. Tee tämä soveltamalla *kolmio-epäyhtälöä*,

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - x|.$$

3. Olkoon A avoin joukko, ja $x \in A$. Osoita, että on olemassa avoin n-väli I siten, että $x \in I \subset A$.

4. Olkoon $I =]q_1, p_1[\times]q_2, p_2[\times \cdots \times]q_n, p_n[$ avoin n-väli. Jos q_i, $p_i \in \mathbb{Q}$, kutsutaan väliä I *rationaaliseksi n-väliksi*. Olkoon $J \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen n-väli. Osoita, että millä tahansa $x \in J$ on olemassa rationaalinen n-väli I siten, että $x \in I \subset J$.

5. Soveltamalla samoja menetelmiä kuin tehtäväsarjan 1 tehtävissä 16 ja 17 ja tämän tehtäväsarjan kahta edellistä tehtävää, osoita, että mikä tahansa $\mathbb{R}^n$:n avoin joukko A voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä avoimista n-väleistä. Toisin sanoen löytyy numeroituva joukkoperhe $\mathcal{Q}$ avoimia n-välejä siten, että

$$\bigcup_{I \in \mathcal{Q}} I = A.$$

6. Olkoon $E_1, \ldots, E_k \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja. Käyttämällä luennoissa todistettua tietoa siitä, että kahden mitallisen joukon, E:n ja F:n yhdiste $E \cup F$ on mitallinen, osoita, että

$$\bigcup_{j=1}^{k} E_j$$

on mitallinen.

7. Olkoon $E_1, \ldots, E_k \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja. Käyttämällä luennoissa todistettua tietoa siitä, että kahden mitallisen joukon, E:n ja F:n leikkaus $E \cap F$ on mitallinen, osoita, että

$$\bigcap_{j=1}^{k} E_j$$

on mitallinen.

8. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja, missä $m(B) = 0$. Olkoon E sellainen joukko, että $A \setminus B \subset E \subset A \cup B$. Osoita, että löytyy joukot C ja D, joilla $E = C \cup D$, C on mitallinen ja $m^*(D) = 0$. Päättele tästä, että E on mitallinen.

9. Olkoot A, B ja E kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että $m(E) = m(A)$.

10. Olkoot $E_1, E_2, \ldots$ mitallisia joukkoja $\mathbb{R}^n$:ssä jolla $m(E_i \cap E_j) = 0$ aina kun $i \neq j$. Osoita, että joukko $G = \bigcup_{i \neq j} E_i \cap E_j$ on nollamittainen (eli $m(G) = 0$) ja että on olemassa mitalliset, erilliset joukot $F_1, F_2, \ldots$ (eli $F_i \cap F_j = \varnothing$ aina kun $i \neq j$) siten, että

$$F_i = E_i \setminus G \quad \text{ja} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = G \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

11. Todista edellisen tehtävien ehdolla, että

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

12. Osoita käyttäen tämän tehtäväsarjan tehtävän 5 tulosta, että avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia.