Mitta ja Integraali
Kesä 2011
1. tehtävät
Esimerkkiratkaisuja, Kaarlo Reipas

1. Esitä inf (eli suurin alaraja) ja sup (eli pienin yläraja) joukosta $[2, 3\frac{3}{4}[$.

Ratkaisu. $\inf \left[2, 3\frac{3}{4}\right[= 2$ ja $\sup \left[2, 3\frac{3}{4}\right[= 3\frac{3}{4}$.

Todistus. Merkitään $A = \left[2, 3\frac{3}{4}\right[$. Olkoon $x \in A$. Nyt $2 \leq x < 3\frac{3}{4}$, joten $2 \leq x$ ja $x \leq 3\frac{3}{4}$, eli 2 on joukon A *jokin* alaraja ja $3\frac{3}{4}$ *jokin* yläraja. Olkoon nyt $y > 2$. Nyt kuitenkin $2 \in A$, niin y ei voi olla joukon A alaraja. Koska y oli mielivaltainen lukua 2 suurempi lukua, eikä se voinut olla alaraja, on luvun 2 oltava alarajoista suurin. Täten $\inf A = 2$.

Olkoon nyt $y < 3\frac{3}{4}$. Merkitään

$$r = \frac{\max(y, 2) + 3\frac{3}{4}}{2}.$$

Luku r on nyt lukujen $\max(y, 2)$ ja $3\frac{3}{4}$ keskiarvo, joten sen on oltava niiden välissä. Siis $2 < r < 3\frac{3}{4}$, joten $r \in A$, ja toisaalta $r > y$. Siis olemme löytäneet joukon A alkion (r) joka on suurempi kuin y, eikä y siten voi olla joukon A yläraja. Siis mikään lukua $3\frac{3}{4}$ pienempi luku ei voi olla yläraja, joten luvun $3\frac{3}{4}$ on oltava ylärajoista pienin. Siis $\inf A = 3\frac{3}{4}$. □

2. Esitä inf ja sup joukosta $\{0, 1, 2, \ldots\}$

Ratkaisu. Joukko ei ole ylhäältä rajoitettu, joten sillä ei ole ainuttakaan ylärajaa, eikä siten pienintä sellaista. Suurin alaraja kuitenkin on ja $\inf\{0, 1, 2, \ldots\} = 0$.

Todistus. Merkitään $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Olkoon $x \in A$. Selvästi $x \geq 0$, joten 0 on joukon A alaraja. Olkoon nyt $y > 0$. Nyt $0 < y$ ja $0 \in A$, joten y ei voi olla A:n alaraja. Siis 0:n on oltava alarajoista suurin. □

3. Esitä inf ja sup joukosta $[0, 2\pi] \setminus \mathbb{Q}$

Ratkaisu. $\inf[0, 2\pi] \setminus \mathbb{Q} = 0$ ja $\sup[0, 2\pi] \setminus \mathbb{Q} = 2\pi$.

Todistus. Merkitään $A = [0, 2\pi] \setminus \mathbb{Q}$. Jos $x \in A$, niin $0 \leq x$, joten 0 on joukon A alaraja. Jos $y > 0$, niin $\min(y, 2\pi) > 0$. Kahden eri reaaliluvun välistä löytyy aina irrationaaliluku, joten löytyy $r \in]0, \min(y, 2\pi)[$, $r \notin \mathbb{Q}$. Tällöin $r \in A$, mutta $r < y$. Siis y ei ole joukon A alaraja. Täten 0 on alarajoista suurin.

Jos $x \in A$, niin $x \leq 2\pi$, joten 2π on joukon A yläraja. Jos $y < 2\pi$, niin koska 2π on irrationaalinen, pätee $2\pi \in A$ ja $2\pi > y$. Siis y ei voi olla yläraja, vaan 2π on ylärajoista pienin. □

4. Esitä välinä, joukko $[1, \pi^2[\cap]7, 20]$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
x \in \left[1, \pi^2\right[\cap \left]7, 20\right] &\iff x \in \left[1, \pi^2\right[\quad \text{ja} \quad x \in \left]7, 20\right] \\
&\iff 1 \leq x < \pi^2 \quad \text{ja} \quad 7 < x \leq 20 \\
&\iff 7 < x < \pi^2 \\
&\iff x \in \left]7, \pi^2\right[
\end{aligned}$$

5. Olkoon $f : \{1,2,3,4,5\} \to \mathbb{R}$ seuraava funktio:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2.5 \\ f(2) &= 2.5 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= 2 \\ f(5) &= 1.5 \end{aligned}$$

Olkoot $A = \{1,3,4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$ ja $B = \{2,3,5\} \subset \{1,2,3,4,5\}$. Esitä seuraavat joukot: $A \cap B$, $f(A)$, $f(B)$, $f(A \cap B)$ ja $f(A) \cap f(B)$. Mitä huomat $f(A \cap B)$:stä ja $f(A) \cap f(B)$:stä?

Ratkaisu.

$$A \cap B = \{1,3,4\} \cap \{2,3,5\} = \{3\}\,.$$

$$f(A) = \{r \in \mathbb{R} : f(a) = r \text{ jollain } a \in A\} = \{2.5, 3, 2\}$$

$$f(B) = \{r \in \mathbb{R} : f(b) = r \text{ jollain } b \in B\} = \{2.5, 3, 1.5\}$$

$$f(A \cap B) = \{r \in \mathbb{R} : f(b) = r \text{ jollain } b \in A \cap B\} = \{3\}$$

$$f(A) \cap f(B) = \{2.5, 3, 2\} \cap \{2.5, 3, 1.5\} = \{2.5, 3\}$$

Huomaamme, että yleisesti ei päde, että $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Kuitenkin $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

6. Olkoot $V_n = [2\pi n, \infty[\subset \mathbb{R}$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f : x \mapsto \sin x$. Esitä seuraavat joukot:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n, \quad f(V_n) \quad \text{ja} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n).$$

Mitä huomaat $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right)$ ja $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n)$:stä?

Ratkaisu.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{r \in \mathbb{R} : r \in V_n \text{ jokaisella } n = 1,2,\ldots\} = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 2\pi n \text{ jokaisella } n = 1,2,\ldots\}$$

Tämä joukko on tyhjä, sillä jos $x \leq 0$, niin $x \notin V_1$ ja jos $x > 0$, esimerkiksi kun $n > \frac{x}{2\pi}$, $2\pi n > x$, joten $x \notin [2\pi n, \infty[= V_n$. Siis mikään $x \in \mathbb{R}$ ei kuulu *jokaiseen* joukkoon V_n, eikä siten näiden leikkaukseen. Siis

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \emptyset.$$

Koska sinifunktio saa millä tahansa välillä $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$ kaikki arvot väliltä $[-1,1]$, niin $f(V_n) = [-1,1]$ jokaisella n. Siis myös

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n) = [-1,1].$$

Koska $f(\emptyset) = \{x \in \mathbb{R} : f(a) = x \text{ jollain } a \in \emptyset\} = \emptyset$, niin huomaamme taas, että yleisesti ei päde, että

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n).$$

Kuitenkin

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n).$$

7. Olkoot X ja Y joukkoja, $f : X \to Y$ kuvaus niiden välillä ja $V_1, V_2, \ldots \subset X$, X:n osajoukkoja. Osoita, että

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n).$$

Huom! edellisten tehtävien perusteella inkluusio voi olla aito.

Ratkaisu. Olkoon $y \in f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right)$. Tämä tarkoittaa, että jokin $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ kuvautuu pisteeksi y, eli $f(x) = y$. Siis jokaisella $n : x \in V_n$ ja $f(x) = y$, joten $y \in f(V_n)$, ja täten

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n).$$

8. Olkoot X ja Y joukkoja ja $f : X \to Y$ injektio niiden välillä (eli $f(x_1) = f(x_2)$ jos ja vain jos $x_1 = x_2$). Olkoon $A \subset X$, X:n osajoukko. Osoita, että

$$f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A).$$

Ratkaisu. Se, että f on injektio, tarkoittaa, etteivät mitkään kaksi eri alkiota voi kuvautua samaksi alkioksi. Olkoon nyt $y \in f(X \setminus A)$. Tällöin jokin joukon $X \setminus A$ alkio kuvautuu pisteeksi y, eli löytyy $x \in X \setminus A$, $f(x) = y$. Koska $x \in X \setminus A$, niin $x \notin A$. Nyt funktion f injektiivisyyden nojalla mikään A:n alkio ei voi kuvautua pisteeksi y. Siis $y \notin f(A)$ eli $y \in Y \setminus f(A)$.

9. Käyttämällä luennoissa esitetty määritelmä, laske $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

Ratkaisu. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$.

Todistus. Merkitään $I = \{1, 2, \ldots\}$, ja jokaisella $n \in I$: $I_n = \{1, \ldots, n\}$. Äärettömän summan määritelmän nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sup_{\substack{S \subset I \\ S \text{ äärellinen}^1}} \sum_{n \in S} \frac{1}{3^n}.$$

Haluamme siis osoittaa, että luku $1/2$ on joukon $A = \{\sum_{n \in S} \frac{1}{3^n} : S \subset I,\ S \text{ äärellinen}\}$ pienin yläraja. Näytetään ensin, että se on yläraja: Olkoon $r \in A$. Siis löytyy jokin äärellinen $S \subset I$, jolla $\sum_{n \in S} \frac{1}{3^n} = r$. Joukko S on äärellinen, joten sillä on suurin alkio, merkitään tätä m. Nyt $S \subset I_m$, joten

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{3^n} \leq \sum_{n \in I_m} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^m}}{1 - \frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Siis $1/2$ on joukon A yläraja. Näytetään, että se on ylärajoista pienin. Olkoon $y < 1/2$. Koska millä tahansa m I_m on joukon I äärellinen osajoukko,

$$\sum_{n \in I_m} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^m}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^m} \in A.$$

Olkoon m sellainen, että $3^m > \frac{1}{1-2y}$. Nyt $\frac{1}{2 \cdot 3^m} < \frac{1}{2} - y$ joten

$$y < \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^m} = \sum_{n \in I_m} \frac{1}{3^n}.$$

Siis $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^m} \in A$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^m} > y$, joten y ei ole joukon A yläraja. $\square$

10. Olkoon $a_1, a_2, \dots$ sellainen jono, että $a_i \geq \epsilon > 0$ kaikille $i = 1, 2, \dots$. Osoita, että $\sum_{i \in \{1,2,\dots\}} a_i = \infty$.

Ratkaisu. Olkoon taas $I_m = \{1, \dots, m\}$. Nyt jokainen I_m on joukon $I = \{1, 2, \dots\}$ äärellinen osajoukko, ja $\sum_{i \in I_m} a_i \geq \sum_{i \in I_m} \epsilon = m\epsilon$, joten joukko

$$\left\{ \sum_{i \in I_m} a_i : m \in I \right\}$$

on rajoittamaton. Siis myös joukko

$$A = \left\{ \sum_{i \in S} a_i : S \subset I,\ S \text{ äärellinen} \right\}$$

on rajoittamaton, ja siten

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{\substack{S \subset I \\ S \text{ äärellinen}}} \sum_{i \in S} a_i = \sup A = \infty.$$

11. Soveltamalla edellistä tehtävä osoita, että

$$\sum_{x \in [0,1]} x = \infty.$$

Ratkaisu. Olkoon $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ jokaisella $n \in \{1, 2, \dots\}$. Nyt $a_n \geq \epsilon > 0$ jokaisella n. Merkitään $B = \{a_i : i \in \{1, 2, \dots\}\}$ Koska jokainen B:n alkioista muodostettu äärellinen summa voidaan myös muodostaa välin $[0, 1]$ alkioista,

$$\left\{ \sum_{x \in S} x : S \subset B,\ S \text{ äärellinen} \right\} \subset \left\{ \sum_{x \in S} x : S \subset [0, 1],\ S \text{ äärellinen} \right\},$$

joten

$$\sup \left\{ \sum_{x \in S} x : S \subset B,\ S \text{ äärellinen} \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{x \in S} x : S \subset [0, 1],\ S \text{ äärellinen} \right\}.$$

Edellisen tehtävän nojalla vasemmanpuoleinen yläraja on ääretön, joten epäyhtälön nojalla näin täytyy olla myös oikeanpuoleinen.

12. Olkoot a_i, $i \in I$, positiivisia reaalilukuja. Oletetaan, että $\sum_{i \in I} a_i < \infty$. Tarkastamalla joukot $I_n = \{i \in I : a_i \geq 1/n\}$, ja summat $\sum_{i \in I_n} a_n$, osoita, että indeksijoukko I on tällöin numeroituva.

Ratkaisu. Koska $\sum_{i \in I} a_i$ on äärellinen, täytyy jokaisen joukoista I_n olla äärellinen, muutoin voisimme valita jostakin joukosta I_n äärettömän jonon x_k, missä $x_k \geq \frac{1}{n}$, ja soveltaa tehtävää 10. Näin saisimme

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \sum_{i \in I_n} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i < \infty,$$

mikä on ristiriita. Siis jokainen I_n on äärellinen. Kuitenkin

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

joten I on numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista, ja siten numeroituva.

13. Olkoot $V_1, \dots, V_k$ avoimia joukkoja. Osoita, että $\bigcap_{n=1}^k V_n$ on avoin.

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla luvun k (leikattavien joukkojen lukumäärän) suhteen.

Todistus. Alkuaskel $k = 1$: $\bigcap_{n=1}^k V_n = V_1$ on avoin, joten väite pätee.

Induktioaskel: Oletetaan, että k monen avoimen joukon leikkaus on avoin. Olkoot $V_1, \dots, V_{k+1}$ avoimia. Nyt

$$\bigcap_{n=1}^{k+1} V_n = \left(\bigcap_{n=1}^{k} V_n\right) \cap V_{k+1}.$$

Olkoon $V = \bigcap_{n=1}^{k+1} V_n$. Näyttääksemme että tämä joukko on avoin, tulee meidän löytää mielivaltaiselle pisteelle $x \in V$ jokin $\epsilon > 0$, jolla

$$B(x, \epsilon) \subset V.$$

Olkoon ϵ_1 ja ϵ_2 sellaisia, että $B(x, \epsilon_1) \subset \bigcap_{n=1}^k V_n$ ja $B(x, \epsilon_2) \subset V_{k+1}$. Tällaiset luvut löytyvät, sillä joukot $\bigcap_{n=1}^k V_n$ ja V_{k+1} olivat oletusten mukaan avoimia. Nyt valitsemalla

$$\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$$

nähdään, että $B(x, \epsilon) \subset \bigcap_{n=1}^k V_n$ ja $B(x, \epsilon) \subset V_{k+1}$, joten

$$B(x, \epsilon) \subset \left(\bigcap_{n=1}^{k} V_n\right) \cap V_{k+1} = V.$$

□

14. Esitä sellaiset avoimet joukot $V_1, V_2, \dots$ siten, että $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ ei ole avoin.

Ratkaisu. Olkoon

$$V_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[.$$

Jokainen V_n on avoin väli, mutta leikkaus $\bigcap_{n\in\{1,2,\dots\}} V_n = \{0\}$ ei ole avoin.

15. Olkoot $F_1, \dots, F_k$ suljettuja joukkoja. Osoita, että $\bigcup_{n=1}^k F_n$ on suljettu.

Ratkaisu. Merkitään jokaisella $n = 1, \dots, k$: $V_n = (F_n)^\complement$. Joukot F_n ovat suljettuja joten joukot V_n ovat avoimia. Tehtävän 13 nojalla näiden leikkaus $\bigcap_{n=1}^k V_n$ on edelleen avoin. Koska de Morganin kaavojen nojalla

$$\bigcap_{n=1}^{k} V_n = \bigcap_{n=1}^{k} (F_n)^\complement = \left(\bigcup_{n=1}^{k} F_n\right)^\complement,$$

niin joukon $\bigcup_{n=1}^k F_n$ on oltava suljettu.

16. Esitä sellaiset suljetut joukot $F_1, F_2, \dots$ siten, että $\bigcup_{n=1}^\infty F_n$ ei ole suljettu.

Ratkaisu. Valitaan jokaisella $n = 1, 2, \dots$: $F_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Tällöin jokainen F_n on yksiönä suljettu, mutta yhdiste

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\right\}$$

ei ole suljettu, sillä se ei sisällä kasautumispistettään 0.

17. Osoita että $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva ja, että $\mathfrak{X} := \{B(x,r) : x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+, r > 0\}$ on numeroituva kokoelma kuulia.

Ratkaisu. Todistetaan induktiolla, että $\mathbb{Q}^n$ on numeroituva.

Todistus. Alkuaskel $n = 1$: $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q}$ on numeroituva, joten väite pätee.

Induktioaskel: Olkoon $\mathbb{Q}^k$ numeroituva. On siis olemassa injektio $j : \mathbb{Q}^k \to \mathbb{N}$. Olkoon $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ myös injektio ja olkoon $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ injektio, jonka määrittelee kaava $h(n,m) = 2^n 3^m$. Tällöin kuvaus

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_{k+1}) = h(j(q_1, q_2, \ldots, q_k), k(q_{k+1}))$$

on injektio joukosta $\mathbb{Q}^{k+1} = \mathbb{Q}^k \times \mathbb{Q}$ joukkoon $\mathbb{N}$, ja siten $\mathbb{Q}^{k+1}$ on numeroituva. $\square$

Todistetaan nyt että $\mathfrak{X}$ on numeroituva kokoelma kuulia.

Todistus. Määritellään kuvaus $w : \mathfrak{X} \to \mathbb{Q}^{n+1}$ kaavalla

$$w(B(x,r)) = (x,r) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, r).$$

Koska $x \in \mathbb{Q}^n$ ja $r \in \mathbb{Q}^+$, niin $w(B) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ millä tahansa kokoelman $\mathfrak{X}$ kuulalla B. Lisäksi näin määritelty kuvaus on injektio, sillä mikäli B_1 ja B_2 ovat kaksi eri kuulaa, niin niillä on oltava joko eri säteet tai eri keskipisteet. $\square$

18. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $\mathfrak{X}$ kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että

$$\mathfrak{B}_A := \{B \in \mathfrak{X} : B \subset A\},$$

on numeroituva kokoelma kuulia ja, että

$$A = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}_A} B;$$

siispä, mikä tahansa avoin joukko $\mathbb{R}^n$:ssä voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä avoimia kuulia.

Ratkaisu. $\mathfrak{B}_A$ on numeroituvan joukon $\mathfrak{X}$ osajoukko, joten se on itsekin numeroituva: Mikäli $g : \mathfrak{X} \to \mathbb{N}$ on injektio, niin $g \restriction \mathfrak{B}_A$ (g:n rajoittuma joukkoon $\mathfrak{B}_A$) on injektio $\mathfrak{B}_A \to \mathbb{N}$.

Koska jokainen kuulista $B \in \mathfrak{B}_A$ sisältyy joukkoon A, niin myös yhdiste

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{B}_A} B \subset A.$$

Riittää siis osoittaa, että $A \subset \bigcup_{B \in \mathfrak{B}_A} B$. Käytämme tähän metrisen topologian tietoa, että $\mathbb{Q}^n$ on *tiheä* $\mathbb{R}^n$:ssä, eli että mielivaltaisen läheltä $\mathbb{R}^n$:n pisteitä löytyy $\mathbb{Q}^n$:n pisteitä.

Todistus. Olkoon $a \in A$. Koska A on avoin, löytyy jokin $r > 0$, niin että $B(a,r) \subset A$. Olkoon $a' \in \mathbb{Q}^n$ sellainen, että $d(a,a') < \frac{r}{4}$ ja $r' \in \left]\frac{r}{4}, \frac{r}{2}\right[$ jokin rationaaliluku. Nyt kuula $B(a', r')$ sisältää pisteen a koska $d(a,a') < r'$ ja lisäksi se sisältyy kuulaan $B(a,r)$. Olkoon nimittäin $x \in B(a', r')$. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(x,a) \leq d(x,a') + d(a',a) < r' + r' < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} < r.$$

Koska $a \in B(a', r') \in \mathfrak{X}$, niin $a \in \bigcup_{B \in \mathfrak{B}_A} B$. $\square$

19. Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko $\mathbb{R}^n$:ssä, ja $y \in \mathbb{R}^n$ mikä tahansa piste. Määritellään joukko $B + y$ olemaan

$$B + y := \{x + y : x \in B\}.$$

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $\mathcal{F}$ joukon A:n Lebesguen peite. Osoita, että n-välien kokoelma

$$\mathcal{F}_{+y} := \{I + y; I \in \mathcal{F}\}$$

on $A + y$:n Lebesgue:n peite

Ratkaisu. Joukon X *peite* on kokoelma joukkoja $\mathcal{F}$, siten että $X \subset \bigcup \mathcal{F}$. Lebesguen peite on numeroituva peite, joka koostuu avoimista väleistä. Näytetään että $\mathcal{F}_{+y}$ on numeroituva peite.

Todistus. Olkoon $a \in A+y$. Siis jollain $a' \in A$, $a = a' + y$. Koska $\mathcal{F}$ on A:n peite, niin löytyy jokin $F \in \mathcal{F}$, $a' \in F$. Tällöin $a = a' + y \in F + y \in \mathcal{F}_{+y}$, joten $a \in \bigcup \mathcal{F}_{+y}$ Siispä $\mathcal{F}_{+y}$ on $A + y$:n peite.

Koska $\mathcal{F}$ on numeroituva, löydämme injektion $j : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Olkoon nyt $f : \mathcal{F}_{+y} \to \mathcal{F}$ kuvaus $f(F+y) = F$. Tällainen kuvaus on selvästi injektio, sillä jos $F_1 + y \neq F_2 + y$, niin $F_1 \neq F_2$. Siis yhdistetty kuvaus $(j \circ f) : \mathcal{F}_{+y} \to \mathbb{N}$ on injektio, joten $\mathcal{F}_{+y}$ on numeroituva. □

Osoitetaan nyt, että $\mathcal{F}_{+y}$ koostuu avoimista väleistä. Olkoot $y_1, \ldots, y_n$ pisteen y koordinaatit, eli $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Väite. Jokaiselle $V =]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_n, b_n[\subset \mathbb{R}^n$,

$$V + y = \prod_{i=1}^{n}]a_i + y_i, b_i + y_i[=]a_1 + y_1, b_1 + y_1[\times \ldots \times]a_n + y_n, b_n + y_n[$$

Todistus.

$$\begin{aligned}
x \in V + y \quad &\iff \quad x + (-y) \in V \\
&\iff \quad x + (-y) \in \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[\\
&\iff \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i + (-y_i) \in]a_i, b_i[\\
&\iff \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \in]a_i + y_i, b_i + y_i[\\
&\iff \quad x \in \prod_{i=1}^{n}]a_i + y_i, b_i + y_i[
\end{aligned}$$

□

20. Soveltamalla edellistä tehtävä, osoita, että $m_n^*(A + y) = m_n^*(A)$.

Ratkaisu. Edellisessä tehtävässä todistimme, että jokaisella avoimella n-välillä V ja $y \in \mathbb{R}^n$ pätee:

$$V + y = \prod_{i=1}^{n}]a_i + y_i, b_i + y_i[.$$

Tästä seuraa suoraan, että välin siirtäminen y:llä ei muuta välin geometrista mittaa:

$$l(V + y) = \prod_{i=1}^{n} ((b_i + y_i) - (a_i + y_i)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = l(V),$$

eli välin geometrinen mitta on *siirtoinvariantti.*

Olkoon nyt $A \subset \mathbb{R}^n$. Jos $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\}$ on A:n Lebesguen peite, niin $\mathcal{F}_{+y}$ on edellisen tehtävän nojalla $A + y$:n Lebesguen peite. Nyt

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{k \in \{1,2,\ldots\}} l(I_k) = \sum_{k \in \{1,2,\ldots\}} l(I_k + y) = S(\mathcal{F}_{+y}),$$

Joten joukot $\{S(\mathcal{F}) : \ \mathcal{F}$ on A:n Lebesguen peite$\}$ ja $\{S(\mathcal{F}) : \ \mathcal{F}$ on $A + y$:n Lebesguen peite$\}$ ja siten niiden suurimmat alarajat ovat samat.

Nyt ulkomitan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} m_n^*(A) &= \inf\{S(\mathcal{F}) : \ \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesguen peite}\} \\ &= \inf\{S(\mathcal{F}) : \ \mathcal{F} \text{ on } A + y\text{:n Lebesguen peite}\} \\ &= m_n^*(A + y) \end{aligned}$$

21. Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko $\mathbb{R}^n$:ssä, ja $k \geq 0$ mikä tahansa reaaliluku suurempi tai yhtäsuuri kuin 0. Määritellään joukko kB olemaan

$$kB := \{kx : x \in B\}.$$

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $\mathcal{F}$ joukon A:n Lebesguen peite. Osoita, että n-välien kokoelma

$$\mathcal{F}_{k\cdot} := \{kI; I \in \mathcal{F}\}$$

on kA:n Lebesgue:n peite

Ratkaisu. Kuten siirron tapauksessa (tehtävä 19). Tehtävänannosta poiketen k ei voi olla 0, sillä tällöin kV ei välttämättä olisi avoin n-väli, vaikka V olisikin. Oletetaan siis, että $k > 0$. Näytetään ensin, että $\mathcal{F}_k$ on numeroituva peite.

Todistus. Olkoon $a \in kA$. Siis jollain $a' \in A$, $a = ka'$. Koska $\mathcal{F}$ on A:n peite, niin löytyy jokin $F \in \mathcal{F}$, $a' \in F$. Nyt $a = ka' \in kF \in \mathcal{F}_k$, joten $a \in \bigcup \mathcal{F}_k$ Siispä $\mathcal{F}_k$ on $A + y$:n peite.

Koska $\mathcal{F}$ on numeroituva, löydämme injektion $j : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Olkoon nyt $f : \mathcal{F}_k \to \mathcal{F}$ kuvaus $f(kF) = F$. Tällainen kuvaus on selvästi injektio, sillä jos $kF_1 \neq kF_2$, niin $F_1 \neq F_2$. Siis yhdistetty kuvaus $(j \circ f) : \mathcal{F}_k \to \mathbb{N}$ on injektio, joten $\mathcal{F}_k$ on numeroituva. □

Osoitetaan nyt, että $\mathcal{F}_k$ koostuu avoimista väleistä.

Väite. Jokaiselle $V =]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_n, b_n[\subset \mathbb{R}^n$,

$$kV = \prod_{i=1}^{n}]ka_i, kb_i[=]ka_1, kb_1[\times \ldots \times]ka_n, kb_n[$$

Todistus.

$$\begin{aligned} x \in kV &\iff \frac{1}{k}x \in V \\ &\iff \frac{1}{k}x \in \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[\\ &\iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \frac{1}{k}x_i \in]a_i, b_i[\\ &\iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \in]ka_i, kb_i[\\ &\iff x \in \prod_{i=1}^{n}]ka_i, kb_i[\end{aligned}$$

□

22. Soveltamalla edellistä tehtävä, osoita, että $m_n^*(kA) = k^n m_n^*(A)$.

Ratkaisu. Kuten siirron tapauksessa. Käytetään edellisen tehtävän tietoa siitä, että

$$kV = \prod_{i=1}^{n}]ka_i, kb_i[\,.$$

Nyt

$$l(kV) = \prod_{i=1}^{n} (kb_i - ka_i) = \prod_{i=1}^{n} k\,(b_i - a_i) = k^n \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = k^n l(V).$$

Olkoon nyt $A \subset \mathbb{R}^n$. Jos $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\}$ on A:n Lebesguen peite, niin $\mathcal{F}_k$ on edellisen tehtävän nojalla kA:n Lebesguen peite. Nyt

$$S(\mathcal{F}_k) = \sum_{i\in\{1,2,\ldots\}} l(kI_i) = \sum_{i\in\{1,2,\ldots\}} l(kI_i) = \sum_{i\in\{1,2,\ldots\}} k^n l(I_i) = k^n S(\mathcal{F}),$$

Nyt ulkomitan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} m_n^*(kA) &= \inf\{S(\mathcal{F}_k) :\ \mathcal{F}_k \text{ on } kA\text{:n Lebesguen peite}\} \\ &= \inf\{k^n S(\mathcal{F}) :\ \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesguen peite}\} \\ &= k^n \inf\{S(\mathcal{F}) :\ \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesguen peite}\} \\ &= k^n m_n^*(A) \end{aligned}$$