Mitta ja Integraali
Kesä 2011
Lisätehtäviä
Palautus 23.06.2011 klo 16 00. Jokainen tehtävä on kolmen pisteen arvoinen. Tehtäväsarjasta saaduilla prosenttiyksiköillä voi nosta edellisten tehtävien prosenttilukuja.

1. Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellainen jatkuva funktio, että $g^{(n)}$ (ϕ:n n:s derivaatta) on jatkuva. Tällöin sanotaan, että g on sileä. Olkoon $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellainen sileä funktio, että $\phi(\mathbb{R}) \subset [0,1]$, $\phi^{-1}(]0,1[) \subset [-1,1]$ ja $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva funktio. Todista että funktio

$$h_\epsilon : y \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) f(x)/\epsilon\, dx$$

on jatkuva ja, että

$$h_\epsilon^{(n)}(y) = \int_{\mathbb{R}} \phi^{(n)}\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) f(x)/(\epsilon^{n+1})\, dx.$$

Todista, että $h_\epsilon^{(n)}$ on jatkuva, ja täten, että h_ϵ on sileä. Todista vielä, että kaikille $n = 0, 1, 2, \ldots$ $h_\epsilon^{(n)}$ on integroituva. Voit käyttää hyväkseen tehtäväsarjan 6:n 11:s tehtävä.

2. Olkoon $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sellaiset integroituvat funktiot, joille pätee kaikille sileillä $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\frac{\partial\phi(x_1,x_2)}{\partial x_i}(x_1,x_2)\, dm_2(x,y) = -\int g(x_1,x_2)\phi(x_1,x_2).$$

Todista, että kaikille sileillä funktioille funktioille $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee, että melkein kaikille $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x_1,t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)\, dt = -\int_{\mathbb{R}} g(x_1,t)\psi(t)\, dt.$$

Laske $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}$ (ei liity edelliseen).

3.

1. Olkoon $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\Gamma = \mathcal{P}(X)$, ja $\mu(A) = \#A/k$ missä $\#A$ on A:n alkioiden lukumäärä. Osoita, että kolmikko (X, Γ, μ) on mitta avaruus.
2. Okoot $a_j \geq 0$ kaikille $j \in \mathbb{N}$, ja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$. Olkoon $A \subset \mathbb{N}$. Määritellän $\mu(A) := \sum_{j \in A} a_j$. Osoita, että $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ on mitta avaruus.
3. Olkoot X ylinumeroituva joukko. Olkoon $\Gamma = \{A \in \mathcal{P}(X) : A$ on numeroituva, tai A^c on numeroituva$\}$. Onko Γ σ-algebra.

4. Olkoon $E_1 = [0,1]$, ja

$$E_{n+1} := E_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{3^n} [(i-1)/3^n, (i-1)/3^n + 1/3^{n+1}] \cup [i/3^n - 1/3^{n+1}, i/3^n]\right).$$

Kutsutaan $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} E_n$ Cantor:n joukoksi. Laskee C:n Hausdorff dimensio, s, ja laske $\mathcal{H}^s(C)$.