Mitta ja Integraali
Kesä 2011
5. tehtävät
palautus 17.06.2011 klo 16 00

1. Olkoon f ei negatiivinen mitallinen funktio, ja $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja. Käytä MKL todistamaan.

$$\int_{\bigcup_i A_i} f = \lim_{i\to\infty} \int_{A_i} f.$$

2. Olkoon $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraava funktio

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{jos } x = 0 \\ |x|^{-1/2} & \text{jos } 0 < |x| \leq 1 \\ |x|^{-2} & \text{jos } 1 < |x|. \end{cases}$$

Todista, että ϕ on integroituva.

3. Todista, että jos f ja $g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia ei-negatiivisia funktioita,

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g.$$

4. Olkoot $f_1, f_2, \ldots : A \to \dot{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia ei-negatiivisia funktioita. Todista, että

$$\int_A \sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{i=1}^{k} \int_A f_i,$$

ja käytä MKL todistamaan, että

$$\int_A \sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f_i,$$

eli Beppo-Levi:n lause

5. Olkoot $f_1, f_2, \ldots : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia ei-negatiivisia funktioita. Todista, että

$$\int_A \liminf_{i\to\infty} f_i \leq \liminf_{i\to\infty} \int_A f_i,$$

eli Fatou:n lemma käyttämällä MKL.

6. Todista, että funktio $f : [\pi, \infty[\to \mathbb{R}$ $f(x) = x^{-1}\cos(x)$ ei ole integroituva.

7. Olkoon ϕ kuten tehtävässä 2. Olkoon $\{q_1, q_2, \ldots\}$ joku numerointi rationaaliluvuille. Todista, että $f : \mathbb{R} \to \dot{\mathbb{R}}$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi(x - q_i)}{2^i}$$

on integroituva.

8. Todista että $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\max\{x^2, x^{1/2}\}},$$

on hyvin määritelty, mitallinen ja integroituva.

9. Todista, että voit käytä DKL laskemaan raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \frac{\cos(x^k)-1}{x^{2k-2}}.$$

ja laske sitä.

10. Olkoon $f_1, f_2, \ldots : A \to [-a, a]$ mitallisia funktioita siten, että $m(A) < \infty$. Todista tasaisesti rajoitetun konvergenssin lause, eli

$$\int_A \lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty}\int_A f_i$$

[Huom kun kirjoitan $\lim_{i\to\infty} f_i = \ldots$ oletan, että raja-arvo on olemassa.]

11. Olkoon $\psi : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ jatkuvasti derivoituva jatkuva funktio siten, että $\psi^{-1}(]0,\infty[) \subset [-1,1]$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva. Todista, että jokaisella $y \in \mathbb{R}$ kuvaus $g_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g_y(x) = \psi(y-x)f(x)$$

on integroituva. Käytä DKL osoittamaan, että kuvaus $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}} g_y(x)\, dm(x)$$

on derivoituva jokaisella y. [vihje: koska ψ on jatkuvasti derivoituva ja kompaktisti tuettu, on olemassa $M = \sup\{|\psi'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Täten ψ:lle pätee $|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$. Tätä ei tarvi todista.]