Mitta ja Integraali
Kesä 2011
4. tehtävät
palautus 09.06.2011 klo 16 00

1. Olkoon $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \ldots$ jono. Sanotaan, että $\lim_{i\to\infty} a_i = \infty$ jos kaikille $M \in \mathbb{R}$ on olemassa i_0 siten, että kaikille $i \geq i_0$ pätee $a_i \geq M$. Sanotaan, että $\lim_{i\to\infty} a_i = -\infty$ jos $\lim_{i\to\infty} -a_i = \infty$. Osoita, että

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \infty \text{ jos ja vain jos } \limsup_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \infty$$

ja

$$\lim_{i\to\infty} a_i = -\infty \text{ jos ja vain jos } \limsup_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = -\infty$$

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ määritellään A:n *sisäpistejoukko* $A^\circ := \bigcup_{U\in\mathcal{U}_A} U$ missä $\mathcal{U}_A := \{U \subset \mathbb{R}^n : U \text{ avoin ja } U \subset A\}$; intuitiivisesti "suurin avoin joukko joka sisältyy A:han". Määritellään A:n sulkeuma $\overline{A} := \bigcap_{F\in\mathcal{F}_A} F$ missä $\mathcal{F}_A := \{F \subset \mathbb{R}^n : F \text{ on suljettu ja } A \subset F\}$; intuitiivisesti "pienin suljettu joukko joka sisältää A:n". Määritellään A:n reuna $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$. Osoita, että jos $m^*(\partial A) = 0$ niin A on mitallinen.

3. Olkoon $f, g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia. Osoita, että $f \cdot g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ on mitallinen.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, mitallinen ja $f_j : A \to \mathbb{R}$ $j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia funktioita. Osoita, että joukot

$$A_j = \{x \in A : f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$$

ovat mitallisia.

5. Olkoot A ja $f_j : A \to \mathbb{R}$ kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että joukko

$$\{x \in A : \text{ jono } (f_j(x))_{j=1}^\infty \text{ on aidosti kasvava}\}$$

on mitallinen.

6. Sanotaan että funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kasvava jos $g(x) \leq g(y)$ aina kun $x \leq y$. Osoita, että kasvava funktio on mitallinen.

7. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kasvava. Osoita, että $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

8. Olkoot $f_1, f_2, \ldots$ jono mitallisia funktioita $A \to \mathbb{R}$, missä $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että joukko $B = \{x \in A : \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ on olemassa}\}$ on mitallinen.

9. Etsi funktion $\sqrt{2}\chi_{[0,\pi]} + 5\chi_{[\pi/2,6]} + 3\chi_{\mathbb{Q}}$ normaaliesitys ja laske sen integraali.

10. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja. Oletetaan, että jokainen $\mathbb{R}^n$:n piste kuuluu korkeintaan p:hen joukkoon A_j. Osoita, käyttämällä yksinkertaisia funktioita, että

$$p\, m\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \geq \sum m(A_i).$$

11. Olkoon $0 < s < 1$. Osoita, että voit käyttää MKL laskemaan seuraava raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}$$

ja laske sitä.