Mitta ja Integraali
Kesä 2011
3. tehtävät
palautus 03.06.2011 klo 16 00

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että kaikille $m \in \mathbb{N}$ on olemassa avoin joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset B$ ja

$$m_n(B) \leq m_n^*(A) + \frac{1}{m}.$$

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Osoita, että on olemassa mitallinen joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että

$$A \subset B \quad \text{ja} \quad m(B) = m^*(A)$$

3. Olkoon $A = [0, \infty[\subset \mathbb{R}$. Osoita, että kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $B \subset \mathbb{R}$ siten, että $A \subset B$ ja $m(B \setminus A) > \epsilon$. Päteekö

$$m(B) \leq m(A) + \epsilon?$$

Miksi?

4. Olkoon A mitallinen ja $m(A) < \infty$. Osoita, että kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko B siten, että $A \subset B$ ja

$$m(B \setminus A) < \epsilon.$$

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen. Merkataan $A_m = A \cap B(0, m)$. Olkoon B_m avoin siten että $A_m \subset B_m$ ja olkoon $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Osoita, että

$$B \setminus A \subset \bigcup_{m=1} (B_m \setminus A_m).$$

Valitsemalla B_m sopivasti osoita että kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa B siten, että $m(B \setminus A) < \epsilon$.

Huomautus. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukkoja. Määritellään seuraavat joukot

$$\liminf_{j \to \infty} A_j := \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k \right) \qquad \limsup_{j \to \infty} A_j := \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k \right)$$

Jos $x \in \liminf_{j \to \infty} A_j$ sanotaan, että “x kuuluu lopulta kaikkiin A_j:hin”. Jos $x \in \limsup_{j \to \infty} A_j$ sanotaan, että “x kuuluu äärettömään moneen A_j:en”. Mieti miksi (ei ole tehtävä).

6. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\liminf_{j \to \infty} A_j \subset \limsup_{j \to \infty} A_j$.

7. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ jolle

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) < \infty.$$

Mitä voit sanoa seuraavasta raja-arvosta?

$$\lim_{m \to \infty} m^* \left(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j \right).$$

Entäpäs $m^*(\limsup_{j \to \infty} A_j)$:sta? Mikäli olet vastannut oikein, olet todistanut Borel-Cantelli lemman.

8. Olkoot $A_j : j \in J$ mitallisia erillisiä joukkoja jolle pätee $m(A_j) > 0$ kaikille $j \in J$. Osoita, että joukko $\{j : m(A_j \cap B(0, n)) > 0\}$ on numeroituva. Tämän avulla todista, että J on numeroituva.

9. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}^n$ mitallinen. Osoita, että

$$\{x \in \mathbb{R}^n : m(f^{-1}\{x\}) > 0\}$$

on numeroituva joukko.

10. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jatkuva. Osoita, että f on mitallinen.

11. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ $m^*(A) > 0$ ja $f : A \to]0, \infty[$ kuvaus. Osoita, että on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että joukkolla

$$A_k := \{x \in A : f(x) > 1/k\}$$

on positiivinen mitta.

12. Olkoon $A, B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ joukkoja siten että $A = \bigcup_i B_i$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ kuvaus. Osoita, että jos $f|_{B_i}$ on mitallinen kaikille i, niin $f : A \to \mathbb{R}$ on myös mitallinen.