Mitta ja Integraali
Kesä 2011
1. tehtävät
palautus 20.05.2011

1. Esitä inf (eli suurin alaraja) ja sup (eli pienin yläraja) joukosta $[2, 3\frac{3}{4}[$.

2. Esitä inf ja sup joukosta {0,1,2,...}

3. Esitä inf ja sup joukosta $[0, 2\pi] \setminus \mathbb{Q}$

4. Esitä välinä, joukko $[1, \pi^2[\cap]7, 20]$.

5. Olkoon $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ seuraava funktio:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2.5 \\ f(2) &= 2.5 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= 2 \\ f(5) &= 1.5 \end{aligned}$$

Olkoot $A = \{1, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $B = \{2, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Esitä seuraavat joukot: $A \cap B$, $f(A)$, $f(B)$, $f(A \cap B)$ ja $f(A) \cap f(B)$. Mitä huomat $f(A \cap B)$:stä ja $f(A) \cap f(B)$:stä?

6. Olkoot $V_n = [2\pi n, \infty[\subset \mathbb{R}$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f : x \mapsto \sin x$. Esitä seuraavat joukot:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n, \quad f(V_n) \quad \text{ja} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n).$$

Mitä huomaat $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right)$ ja $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n)$:stä?

7. Olkoot X ja Y joukkoja, $j : X \to Y$ kuvaus niiden välillä ja $V_1, V_2, \ldots \subset X$, X:n osajoukkoja. Osoita, että

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n).$$

Huom! edellisten tehtävien perusteella inkluusio voi olla aito.

8. Olkoot X ja Y joukkoja ja $f : X \to Y$ injektio niiden välillä (eli $f(x_1) = f(x_2)$ jos ja vain jos $x_1 = x_2$. Olkoon $A \subset X$, X:n osajoukko. Osoita, että

$$f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A).$$

9. Käyttämällä luennoissa esitetty määritelmä, laske $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

10. Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ sellainen jono, että $a_i \geq \epsilon > 0$ kaikille $i = 1, 2, \ldots$. Osoita, että $\sum_{i \in \{1,2,\ldots\}} a_i = \infty$.

11. Soveltamalla edellistä tehtävä osoita, että

$$\sum_{x \in [0,1]} x = \infty.$$

12. Olkoot a_i, $i \in I$, positiivisia reaalilukuja. Oletetaan, että $\sum_{i\in I} a_i < \infty$. Tarkastamalla joukot $I_n = \{i \in I : a_i \geq 1/n\}$, ja summat $\sum_{i\in I_n} a_n$, osoita, että indeksijoukko I on tällöin numeroituva.

13. Olkoot $V_1, \dots, V_k$ avoimia joukkoja. Osoita, että $\bigcap_{n=1}^{k} V_n$ on avoin.

14. Esitä sellaiset avoimet joukot $V_1, V_2, \dots$ siten, että $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ ei ole avoin.

15. Olkoot $F_1, \dots, F_k$ suljettuja joukkoja. Osoita, että $\bigcup_{n=1}^{k} F_n$ on suljettu.

16. Esitä sellaiset suljetut joukot $F_1, F_2, \dots$ siten, että $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ei ole suljettu.

17. Osoita että $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva ja, että $\mathfrak{X} := \{B(x,r) : x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+, r > 0\}$ on numeroituva kokoelma kuulia.

18. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Olkoon $\mathfrak{X}$ kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että

$$\mathfrak{B}_A := \{B \in \mathfrak{X} : B \subset A\},$$

on numeroituva kokoelma kuulia ja, että

$$A = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}_A} B;$$

siispä, mikä tahansa avoin joukko $\mathbb{R}^n$:ssä voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä avoimia kuulia.

19. Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko $\mathbb{R}^n$:ssä, ja $y \in \mathbb{R}^n$ mikä tahansa piste. Määritellään joukko $B + y$ olemaan

$$B + y := \{x + y : x \in B\}.$$

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $\mathcal{F}$ joukon A:n Lebesguen peite. Osoita, että n-välien kokoelma

$$\mathcal{F}_{+y} := \{I + y; I \in \mathcal{F}\}$$

on $A + y$:n Lebesgue:n peite

20. Soveltamalla edellistä tehtävä, osoita, että $m_n^*(A + y) = m_n^*(A)$.

21. Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko $\mathbb{R}^n$:ssä, ja $k \geq 0$ mikä tahansa reaaliluku suurempi tai yhtäsuuri kuin 0. Määritellään joukko kB olemaan

$$kB := \{kx : x \in B\}.$$

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $\mathcal{F}$ joukon A:n Lebesguen peite. Osoita, että n-välien kokoelma

$$\mathcal{F}_{k\cdot} := \{kI; I \in \mathcal{F}\}$$

on kA:n Lebesgue:n peite

22. Soveltamalla edellistä tehtävä, osoita, että $m_n^*(kA) = k^n m_n^*(A)$.