Analyysin kehityksestä 1600->

1660-luvulla Isaac Barrow esitti ensimmäisenä erotusosamäärän raja-arvon idean tangentin yhteydessä. Esitys oli kuitenkin enemmänkin ”geometrinen toteamus”. 1600-luvun lopulla Newtonin ja Leibnizin toisistaan riippumatta tuoma laskennallinen metodi, *kalkyyli*, toi ensimmäistä kertaa yhtenäisen teorian differentiaali- ja integraalilaskentaan. Kalkyyli tosin sisälsi epätäsmällisyyksiä, jotka täsmällistyivät 1800-luvulla. 1700-luvulla Euler ja Bernoullin veljekset kehittivät differentiaali- ja integraalilaskentaa edelleen..

Käsitteestä nimeltä *funktio*

Minkälaisille funktioille *kalkyyli* oli tarkoitettu? Mikä teki funktiosta "rehellisen" Eulerille ja muille 1600-1700-luvun matematiikoille? Riittikö, jos funktio voitiin muotoilla (yhdellä) eksplisiittisellä kaavalla? (Nykyään kiinnostus kohdistuu usein *kuvauksiin* ja niiden lähtö- ja maalijoukkoihin – eksplisiittisellä kaavalla ei ole niin suurta väliä.)

Käsitteestä nimeltä *funktio*

- Ovatko funktiot x^2, $|x|$ ja $\theta(x)$ ”rehellisiä”?
- $|x|$ ja $\theta(x)$ eivät ole ”sileitä” eli ei hyvinmääriteltyä kaarevuutta (eli derivaattaa) pisteessä $x = 0$
- Entä funktiot x^3 ja $x|x|$?
- $x|x| \notin C^2(\mathbb{R})$, mutta $x^n|x| \in C^n(\mathbb{R})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$!
- Olkoon $h(x) = 0$, kun $x \leq 0$, ja $h(x) = e^{-1/x}$, kun $x \geq 0$. $h \in C^\infty(\mathbb{R})$!
- Funktiolla h ei ole sarjaesitystä, se ei siis ole *analyyttinen*!
- Analyyttiset funktiot ”vielä parempia”, kuin C^∞-funktiot..

Fourier-sarjoista

Funktion f Fourier-sarja on muotoa

$$f(x) = \sum c_n e^{inx}, \tag{1}$$

missä c_n, funktion n.:s Fourier-kerroin on määritelty kaavalla

$$c_n = \int f(x) e^{-inx} \frac{dx}{2\pi}. \tag{2}$$

Yhtä hyvin Fourier-sarja ja -kertoimet voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right),$$

$\mathrm{a}_n = \frac{1}{\pi} \int f(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int f(x) \sin(nx)\, dx.$

”Ranskan vallankumouksen tuote”, matemaatikko Joseph Fourier (s.1768) julkaisi vuonna 1822 *Lämmön analyyttisen teorian*. Ennen Fourier'a Daniel Bernoulli oli havainnut mahdollisuuden ratkaista jousen värähtelyä koskevia ongelmia trigonometrisen sarjan avulla ja toisaalta Euler oli soveltanut kaavaa (2) erikoistapauksissa. Fourier oli kuitenkin ensimmäinen, joka ratkaisi yhteyden kaavojen (1) ja (2) välillä.

Fourier-sarjat

Fourier uskoi, että Fourier-sarjat ovat yleistyökalu luonnonilmiöiden tutkimiseen. Fourier oli varma, että on olemassa pieni määrä peruslakeja, jotka kattavat kaikki luonnonilmiöt. Fourierin intuitio, *jokainen* 2π*-jaksollinen ilmiö voidaan esittää trigonometrisenä sarjana*, oli oikea, mutta hän oli kuitenkin väärässä väittäessään, että mielivaltaisen funktion Fourier-sarja suppenee.

Fourierin maine ja hänen työnsä arvostus kasvoivat maailmalla hänen kuolemansa (vuonna 1830) jälkeen, jolloin matemaatikot, fyysikot ja insinöörit oivalsivat Fourier-analyysin merkityksen itsessään – ei vain lämmön tutkimuksessa.

Dirichlet'n probleema

Dirichlet'n probleema: *Olkoon G euklidisen n-ulotteisen avaruuden R^n (rajoitettu) alue ja f jatkuva reaaliarvoinen funktio G:n reunalla ∂G. On löydettävä jatkuva funktio $u : \overline{G} \longrightarrow R$ siten, että $u|\partial G = f$ ja $u|G$ on harmoninen ts. $\Delta u = 0$ alueessa G.*

Dirichlet'n periaate: *Olkoot G ja f kuten yllä. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva funktio $u : \overline{G} \longrightarrow R$ siten, että $u|\partial G$ on jatkuvasti derivoituva, $u|\partial G = f$ ja $I(u) = \inf_{v \in W_f} I(v)$, missä $I(v) = \int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dm$ on Dirichlet'n integraali sekä*

$$W_f = \{v : \overline{G} \longrightarrow R | v \text{ on jatkuva } v|G \text{ on jatkuva ja derivoituva}, v|\partial G = f\}.$$

Dirichlet'n probleema

Dirichlet'n probleema kumpusi fysiikan ongelmista: sekä Newtonin voimakenttä massajakauman ulkopuolella, että lämmön eteneminen (jota Fourier ensimmäisenä tutki) liittyvät Dirichlet'n probleemaan. Dirichlet'n probleeman ja periaatteen taustalla oli jo paljon matemaattista teoriaa ja se on myös hyvä esimerkki sukupolvien yli jatkuneesta työstä.

- Laplace'n yhtälö $\Delta u = 0$
- Potentiaalin (probleemassa u) käyttö Lagrangelta ja Laplacelta
- Gauss kiinnitti ensimmäisenä huomion ko. ongelmaan; Poisson oli ratkaissut ongelman, kun $G = B^3(0, 1)$
- Opettaja-oppilas-ketju: Gauss-Dirichlet-Riemann!
- Dirichlet ratkaisi probleeman periaatteensa avulla; probleema ja periaate ovat kuitenkin väärin asetettuja!
- Kritiikkiä Weierstrassilta ja Hadamardilta $\longrightarrow$ lisää tutkimusta!

Dirichlet'n probleema

- Riemann käytti Dirichlet'n periaatetta analyyttisten fuktioiden teoriassa $\longrightarrow$ .. $\longrightarrow$ Riemannin kuvauslause!
- 1800-luvun lopussa Dirichlet'n probleeman ja -periaatteen selvittelyä useiden matemaatikoiden toimesta, mm. Schwartz, Neumann, Poincare, Perron, Wiener..
- Arzelan tutkimukset Dirichlet'n ongelman parissa johtivat, yhdessä Volterran kanssa, funktionaalianalyysin syntyyn
- Dirichlet'n periaatteesta syntyneet ongelmat ja kysymykset tuottaneet paljon uutta tutkimusta ja tuloksia matematiikkaan!
- Osittaisdifferentiaaliyhtälöissä, variaatiolaskennassa ja potentiaaliteoriassa Dirichlet'n probleeman merkitys keskeinen
- Paitsi kompleksi-ja funktionaalianalyysi, myös mitta- ja integrointiteoria ovat kytkeytyneet Dirichlet'n ongelmaan!

Hilbertin 23 ongelmaa

David Hilbert esitti Pariisin konferenssissa vuonna 1900 23 siihen asti ratkaisemattomana ollutta ongelmaa. Näistä ongelmat 19, 20 ja 23 koskevat Dirichlet'n probleeman ja periaatteen laajentamista. 16 ongelmaa on tähän päivään mennessä ratkaistu, 1 ratkaistu osittain, 3 todettu kysymyksenasettelultaan vaillinaisiksi ja 3 ongelmista ovat vielä ratkaisematta. Joka tapauksessa Hilbertin ongelmista tuli "tavoitteita", jotka ovat työllistäneet ja työllistävät matemaatikkoja edelleen.