

Vanhan ajan matematiikkaa: Babylonia (Mesopotamia)

Babylonian valtakunta sijaitsi Mesopotamiassa; Mesopotamia = Kaksoisvirran maa = nykyisen Irakin alueen sekä Syyrian itäosan muodostama alue

Tyypillisiä babylonialaisen matematiikan piirteitä:

- ▶ Nuolenpääkirjoitus, lukujen 1-59 merkinnät hieroglyfinumeroiden tapaan
- ▶ Seksagesimaalijärjestelmä eli 60-kantainen lukujärjestelmä - Ajassa edelleen käytössä jako 60:een!
- ▶ "Seksagesimaalipilkku" puuttui ja "nolla" (käytössä vain lukujen välissä) vasta pari sataa vuotta e.a.a.
- ▶ Matematiikka Babyloniassa oli lähinnä sanallista algebraa hallinnon, tähtitieteen ja astrologian tarpeisiin.

Vanhan ajan matematiikkaa: Babylonia (Mesopotamia)

- ▶ Taitavia algoritmisia menetelmiä, mm. neliöjuuren approksimoinnille
- ▶ 2. asteen yhtälöitä osattiin ratkaista – tosin negatiiviset luvut eivät olleet käytössä
- ▶ Plimton 322 (savitaulu) kertoo, että Pythagoraan lauseeksi myöhemmin nimetty yhtälö tunnettiin jo Babyloniassa!!
- ▶ Piin arveltiin olevan 3 tai $25\frac{1}{8}$

Vanhan ajan matematiikkaa: Kreikka

Antiikin Kreikka \neq maantieteellinen Kreikka!

Kreikan aikakausi jaetaan *arkaaiseen* (700-500 e.a.a.), *klassiseen* (480-330 e.a.a.) ja *hellenistiseen* (330-27 e.a.a.) kauteen.

Näistä hellenistinen aika on mielenkiintoisin matematiikan kehityksen kannalta.

- ▶ Suuri osa nykyisin käytössä olevista termeistä on kreikan kielistä alkuperää
- ▶ Geometria siirtyi uudelle käsitteelliselle tasolle verrattuna Egyptiin ja Babyloniaan
- ▶ Kriittinen asenne: pyrittiin todistamaan myös aiemmin "ilmeisinä" pidettyjä asioita, todistukset ja aksioomat
- ▶ Epäsuorat todistukset tyypillisiä kreikkalaiselle matematiikalle

Vanhan ajan matematiikkaa: Kreikka

Thales (624?-547? e.a.a.) todisti seuraavat geometrian teoreemat:

- a) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret
- b) Ristikulmat ovat yhtä suuret
- c) Kaksi kolmiota, joilla on yhtä suuret kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu, ovat yhtenevät
- d) Ympyrän jokainen halkaisija jakaa ympyrän kasteen yhtä suureen osaan
- e) Puoliympyrän kaaren sisältämä kulma on suora

Vanhan ajan matematiikkaa: Kreikka

- ▶ Pythagoras (572?-497 e.a.a.) perusti koulukunnan, joka tod.näk. otti ensimmäisenä käyttöön sanan *matematiikka* = "se, mitä tulee tietää"
- ▶ Pythagoraan filosofis-uskonnollisessa koulukunnassa oli mukana myös naisia!
- ▶ "Kaikki maailmassa on (kokonaislukujen) matematiikkaa"; $\sqrt{2}$:n löytyminen järkytti pythagoralaisia
- ▶ Pythagoralaisilla lukujen luokittelu parillisiin ja parittomiin sekä slkulukuihin ja yhdistettyihin lukuihin

Antiikin 3 suurta ongelmaa:

- ▶ ympyrän neliöiminen (pinta-alan laskeminen)
- ▶ kulman kolmijako
- ▶ kuution kahdentaminen

Ensimmäistä kertaa esitettiin matemaattisia ongelmia, joilla ei tekemistä käytännön tarpeiden kanssa! Myöhemmin on osoitettu, että ongelmat eivät ratkea harpin ja viivaimen avulla konstruoimalla.

Zenonin paradoksit:

- ▶ Dikotomia
- ▶ Akhilleus ja kilpikonna
- ▶ Nuoli
- ▶ Stadion

Miten paradokseista päästiin eroon? **Aristoteles** toi matematiikkaan suureen ja luvun eron! "Ei olemassa aktuaalista ääretöntä, sen sijaan potentiaalinen äärettömyys on."

Vanhan ajan matematiikkaa: Kreikka

Platon (429-347 e.a.a.), Sokrateen oppilas ja Aristoteleen opettaja

- ▶ tutustui pythagoralaisiin
- ▶ oli sitä mieltä, että sopivin valtion asukasmäärä on 5040, koska se on lukujen 12, 21 ja 20 tulo ja sen kahdestoista osa on jaollinen 12:lla ja koska se on jaollinen luvuilla 1-10 ja 12. (Kuitenkin 5038 jaollinen 11:llä).

Platonin kappaleet tunnettiin ilmeisesti jo ennen kreikkalaisia - kunnia todistuksesta Platonin aikalaiselle Theaitetokselle.

<http://fi.wikipedia.org/wiki/Platoninkappale>

Eudoksos, matemaatikko ja tähtitieteilijä, oli huomattavin Platonin piirin edustaja ja toi matematiikkaan *tyhjennysmenetelmän* (pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämiseksi) sekä tutki ”yhteismitattomien” lukujen suhteita.

Eukleides (365-300 e.a.a.) sai ilmeisesti koulutuksensa Platonin Akademiassa. Eukleideen Alkeet (Elementa, Stoikheia) n.300 e.a.a.

- ▶ on varhaisin säilynyt ”matematiikan oppikirja”
- ▶ kokoaa yhteen kaiken siihen astisen tiedon matematiikasta (geometriasta)
- ▶ oli käytössä oppikirjana yleisesti 1800-luvulle saakka myös Suomessa
- ▶ sisältää todistuksen sille, että kahden ympyrän alan suhde on sama kuin niiden halkaisijoiden neliöiden suhde

Termit postulaatti (lat. ”vaaditaan”) ja aksiooma (”yleisesti hyväksytty”) juontuvat Alkeista.

Arkhimedes (287-212 e.a.a.) - Antiikin lahjakkain(?) matemaatikko ja luonnontieteilijä

- ▶ sai koulutuksensa ilmeisesti Aleksandriassa
- ▶ "harrastuksena" aseiden kehittäminen
- ▶ pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen tyhjennysmenetelmällä (integraalilaskennan alkuaskeleet)
- ▶ esitti merkintätavan erittäin suurille luvuille (lukujen kertolasku = eksponenttien yhteenlasku)

Vanhan ajan matematiikkaa: Kreikka

Apolloniuksen (260-170 e.a.a.) kartioleikkaukset: fysikaalinen merkitys vasta Keplerin planeettateorian ja Newtonin mekaniikan myötä lähes 2000 v myöhemmin! Nimitykset *paraabeli* ("asettaa rinnalle"), *ellipsi* ("jää vajaaksi") ja *hyperbeli* ("ylittyy") peräisin Apolloniukselta.

Diofantoksen yhtälöt = polynomiyhtälöt tai yhtälöryhmät, joihin ratkaisuna kokonais- tai rationaaliluku

Trigonometriaa geometrian keinoin Antiikissa kehittivät tähtitieteilijät **Hipparkhos ja Ptolemaios**. Nykyisiä trigonometrisiä yhtälöitä ei vielä tunnettu.

Luentotehtävä, Diofantoksen ikä

Diofantos eli $\frac{1}{6}$:n elämästään lapsena, $\frac{1}{12}$:n nuorukaisena ja sitten vielä $\frac{1}{7}$:n poikamiehenä. Viisi vuotta sen jälkeen, kun Diofantos oli mennyt naimisiin, hän sai pojan, joka kuoli neljä vuotta isäänsä ennen ja saavutti puolet isänsä ikävuosista.

Mikä mahtoi olla Diofantoksen ikä?

Hellenistisen kulttuurin romahduksen myötä romahti myös matematiikka:

Yhtenä syynä pidetään haluttomuutta muodostaa matemaattisia yleiskäsitteitä vapaasti, reaalimaailman vastineista riippumatta (vrt. nykyajan matematiikalle ominainen formalismi).

Vanha käsitys: "Totuudet", ideaalimaailma vs. reaalimaailma

vs.

Uusi käsitys: Sovitut määritelmät, perusobjektit

"Hypatian (400-luvulla) mukana kuoli viimeinen sivistys Antiikin Kreikasta."

Matematiikkaa keskiajalla (n. 500-1400)

Kreikan kulttuurin romahduksen myötä koko Länsi-Euroopan matematiikan kehitys jäi pimentoon vuosisatojen ajaksi. Keskiajalla matematiikan kehityksen painopiste siirtyi Aasiaan (Intia, Kiina). Vasta keskiajan loppuvaiheilla, 1100-1200-luvuilla matematiikan harrastus elpyi Euroopassa.

- ▶ 10-järjestelmä, "*arabialaiset*" numerot edelleen käytössä!
- ▶ NOLLA omana lukunaan (**Aryabhata** 400-luvulla) , 'nothingness = eternity'
- ▶ **Brahmagupta** esitti nollan ominaisuudet 600-luvulla:
 $1 + 0 = 1$, $1 - 0 = 1$, $1 \times 0 = 0$
- ▶ Entä $\frac{1}{0} = ?$ $\frac{1}{0} = \infty!$ (**Bhaskara II Acharya** 1100-luvulla)

- ▶ Sinifunktio!
- ▶ "Velat" = negatiiviset luvut
- ▶ "Numeroilla oma elämä", Brahmagupta: $x^2 = y \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$
(Lännessä vasta Fermat 1600-luvulla..)

- ▶ π :lle likiarvo 3,1416 (Aryabhata) \rightarrow maan ympärysmitta
- ▶ "Auringon etäisyys 400 kertainen Kuun etäisyyteen verrattuna"
- ▶ Äärettömät summat, sarjat vs. trigonometria
- ▶ π :n sarjaesitys (**Madhava**)
- ▶ Yksisanainen todistus "Katso!" Pythagoraan lauseelle (Bhaskara II)

Ratkaise seuraava tehtävä Bhaskara II Acharyan kirjasta "Vija-Ganita" (1100-luvulta):

Joku sanoo "Anna minulle 100, niin minulla on kaksi kertaa niin monta kuin sinulla, ystäväni!" Ystävä vastaa: "Jos sinä annat minulle 10, tulen minä kuusi kertaa niin rikkaaksi kuin sinä." Montako oli kummallakin?

Luentotehtävä, ratkaisu

Ratkaisu:

Merkitään x :llä sitä mitä "ystävälle" jäisi, jos hän antaisi pyydetyt 100. Tällöin ensin puhuneella olisi $2x$. Aluksi ystävällä on siis ollut $x + 100$ ja ensin puhuneella $2x - 100$. Toisaalta, "ystävän" puheiden perusteella pätee yhtälö

$$(x + 100) + 10 = 6((2x - 100) - 10).$$

Ratkaistaan x ylläolevasta yhtälöstä

$$\begin{aligned}(x + 100) + 10 &= 6((2x - 100) - 10) \\ \iff x + 110 &= 6(2x - 110) \\ \iff x + 110 &= 12x - 660 \\ \iff 770 &= 11x \\ \iff x &= 70.\end{aligned}$$

Alunperin "ystävällä" oli siis $70 + 100 = 170$ ja ensin puhuneella $2 \cdot 70 - 100 = 40$. (Tarkista, että ratkaisu toimii!)

Keskiaika: Matematiikka islamilaisten käsissä (n. 600-800)

Islamin kulttuurin suurimpana ansiona pidetään antiikin perinnön tallettamista ja toisaalta intialaisten aritmetiikan osaamista ja välittämistä.

- ▶ "Oppiminen Jumalan vaatimus"
- ▶ rukousajat, geometrinen symmetria koristuksissa
- ▶ Merkittävin arabimatemaatikko **Muhammed Al-Khwarizmi** jatkoi intialaisten (huolimattoman käännöksen vuoksi *arabialaisina* tunnettujen) numeroiden 1 – 9, 0 käyttöä ja vahvisti näin niiden tärkeyttä

Keskiaika: Matematiikka islamilaisten käsissä (n. 600-800)

- ▶ algebran laskutoimituksiin systemaattiset tavat; kaavat mille tahansa numeroille (mm. 2. asteen yhtälö)
- ▶ arabitähtitieteilijät tunnistivat tangenttifunktion ja jossain määrin myös kaikkia muita trigonometrisiä funktioita
- ▶ Muita arabimatemaatikoita olivat mm. **Omar Khaijam** (tutki 3.asteen yhtälöitä) ja **Al-Kashi** (π :lle 16-desimaalinen arvo)

Mitä Kiinan muuri kertoo insinööritaidoista?!

- ▶ "10-järjestelmä": numerot 1-9, paikkajärjestelmä 1000 vuotta ennen länttä!
- ▶ ei nollaa, tyhjä paikka lukujen välissä
- ▶ numeroilla kosminen tarkoitus (odd=male, even=female, 8=onni)
- ▶ Sudoku-tyyppisiä pelejä harrastettiin paljon
- ▶ astronomit arvostettuja matemaatikkoja

Verotuksen, palkkojen laskun, painojen ja mittojen myötä matematiikka kehittyi..

- ▶ yhtälöryhmät, neliöjuuret, 2. asteen yhtälöt, kuutiojuuret
- ▶ tilavuuksien approksimointi
- ▶ negatiiviset ja positiiviset luvut tunnettiin varhain
- ▶ π :lle likiarvoja..

- ▶ *Kiinalainen jäännöslause*: on olemassa luku, jota annetuilla luvuilla jaettaessa saadaan annetut jakojäännökset.
- ▶ **Jang Hui**: kaava $n:n$ ensimmäisen neliöluvun summalle ja binomikerroinkaava (eli Pascalin kolmio)
- ▶ Yhteydet muihin kulttuureihin olivat niukat

Varhaiskeskiajalla Euroopan matematiikan taso oli alhainen. Matematiikan osaaminen elpyi keskiajan lopulla ja 1200-luvulla Länsi-Euroopan matemaattinen taso kohosi arabialaiselle tasolle. Kreikan (kreikan kielisiä) matemaattisia tekstejä alettiin kääntää myös latinaksi.

Eurooppa 1200-1300 -luvulla

- ▶ Ensimmäiset yliopistot perustettiin, matematiikalla ei vielä omaa "oppituolia"
- ▶ Matemaattis-filosofisia pohdintoja
- ▶ Ääretön: 1) lukumäärä, 2) mielivaltaisen pieni/suuri
- ▶ Rutto 1300-luvulla!
- ▶ Ranskalainen **Nicole Oresme** päätteli, että harmonien sarja hajaantuu. Lisäksi hän toi matematiikkaan potenssin x^q , $q \in \mathbb{Q}$.
- ▶ Uusia lähestymistapoja tieteellisessä ajattelutavassa, käsitteellinen yleistäminen

Luentotehtävä, Fibonacci'n kanipari

Kuinka monta kaniiniparia syntyy vuodessa, jos vuoden alussa on yksi pari ja jokainen pari synnyttää joka kuukausi uuden parin, joka alkaa synnyttää kahden kuukauden kuluttua? (Liber abbac vuodelta 1202, kirj. Fibonacci eli Leonardo Pisalainen)

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad a_1 = a_2 = 1$$

Fibonazzin luvut

- ▶ Fibonaccin luvut esiintyvät laajalti luonnossa! Kukat, ananas, etanat, ...
<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.htmlspiral>
- ▶ Fibonazzi käytti arabialaisia, ei roomalaisia numeroita!

Osoita induktiolla, että Fibonaccin luvuille $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ on voimassa

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1 \quad \text{ja} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n .