Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 2
Ratkaisuehdotus

Tapana on samastaa avaruus K^n sarakevektorideiden muodostaman avaruuden $K^{n\times 1}$ kanssa. Voidaan siis yhtä hyvin kirjoittaa $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tai $[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$.

Tehtävissä 1–10 konstruoidaan vaihe vaiheelta kannanvaihtomatriisi kahden avaruuden $\mathbb{R}^4$ kannan S ja T välille, ja varmistutaan tämän toiminnasta. Kannattaa verrata tehtäviä kurssisivulta löytyvään tekstiin kannanvaihdosta.

1. Tiedetään, että avaruudella $\mathbb{R}^4$ on kanta

$$S = ((1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,1,1,0),\ (1,1,1,1)).$$

Kirjoita vektori $v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ kannan S alkioiden lineaarikombinaationa.

Ratkaisu: Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^4$ kantaa

$$S = ((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)).$$

Olkoon $v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Haluamme löytää kertoimet $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, joilla

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z+w \\ y+z+w \\ z+w \\ w \end{bmatrix}$$

Vertaamalla vasemman- ja oikeanpuoleisia matriiseja nähdään heti, että täytyy olla $w = d$. Takaisinsijoittamalla saadaan ensin $z = c - d$, sitten $y = b - c$ ja lopulta $x = a - b$. Siispä voidaan kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = (a-b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (b-c) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (c-d) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Millainen on edellisen tehtävän vektorin $v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ koordinaattivektori $[v]_S$?

Ratkaisu: Otetaan jo nyt käyttöön seuraavassa tehtävässä esiteltävät merkinnät $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (1,1,1,0)$ ja $v_4 = (1,1,1,1)$. Edellisen tehtävän nojalla

$$(a,b,c,d) = (a-b)v_1 + (b-c)v_2 + (c-d)v_3 + dv_4,$$

joten kannan $S = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ suhteen vektorilla (a, b, c, d) on koordinaatit $a - b, b - c, c - d, d$. Niinpä vastaava koordinaattivektori on

$$[v]_S = \begin{bmatrix} a - b \\ b - c \\ c - d \\ d \end{bmatrix}.$$

3. Mitkä ovat vektorien

$$v_1 = (1, 0, 0, 0),\ v_2 = (1, 1, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 1, 0) \text{ ja } v_4 = (1, 1, 1, 1).$$

koordinaattivektorit tehtävässä 1 esitetyn kannan S suhteen?

Ratkaisu: Tehtävässä on siis tarkoituksena löytää kannan S alkioden esitykset saman kannan suhteen. Osoittautuu, että tämä on äärimmäisen yksinkertaista (riippumatta kannan S valinnasta): esimerkiksi $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$. Yleisemmin voidaan kaikilla $i = 1, 2, 3, 4$ kirjoittaa

$$v_i = \sum_{j=1}^{4} a_j v_j,$$

missä $a_i = 1$ ja $a_j = 0$ jos $j \neq i$. Näin ollen

$$[v_1]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [v_2]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [v_3]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [v_4]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Mitkä ovat edellisen tehtävän vektorien v_1, v_2, v_3 ja v_4 koordinaattivektorit luonnollisen kannan

$$E = ((1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 1, 0))$$

suhteen?

Ratkaisu:

Viimeistään tässä kohtaa on tärkeä muistaa, etteivät vektori ja sen koordinaattiesitys ole sama asia: vektori on vektoriavaruuden alkio ja sen esitys *jonkin kannan suhteen* on kerroinkunnan sarakevektori (joka siis riippuu valitusta kannasta).

Tehtävän ratkaisuksi saadaan

$$[v_1]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [v_2]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [v_3]_E \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [v_4]_E \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Jatkoa edellisiin tehtäviin. Etsi matriisi A, jolla kertomalla vektorien v_1, v_2, v_3 ja v_4 koordinaattivektorit kannan S suhteen voidaan muuttaa koordinaattivektoreiksi kannan E suhteen. Toisin sanoen $A[v_i]_S = [v_i]_E$ kaikilla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Kannattaa edetä sarake sarakkeelta.

   Ratkaisu: Haluamme löytää sellaisen matriisin A, jolla $A[v_i]_S = [v_i]_E$ kaikilla kannan S alkioilla v_i. Mutta tehtävän 3 nojalla esitys $[v_i]_S$ on aina samaa muotoa kuin luonnollisen kannan i. vektori e_i – niinpä tulo $A[v_i]_S$ on aina matriisin A i. saraketta vastaava vektori (kannattaa miettiä mitä tällaisessa kertolaskussa oikein tapahtuu). Valitsemalla sarakkeiksi nyt vektorit $[v_i]_E$, ts. valitsemalla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   ehto $A[v_i]_S = [v_i]_E$ toteutuu kaikilla i.

   Ratkaisu:

6. Mitä edellisessä tehtävässä löytämäsi matriisi A tekee vektorin $v = (a, b, c, d)$ koordinaattivektorille $[v]_S$?

   Ratkaisu: Edellisen viikon tehtävissä huomattiin, kuinka lineaarikuvauksen tuntemiseksi riittää tietää mitä se tekee lähtöavaruuden kantavektoreille. Koska matriisit vastaavat lineaarikuvauksia, on helppo uskoa saman ominaisuuden olevan voimassa myös matriiseille. Tässä tehtävässä käy esimerkinomaisesti ilmi, että näin todella onkin. Huomaamme nimittäin, että edellisessä tehtävässä löytämämme matriisi A, joka muutti kantavektoreiden esitykset kannasta S kantaan E, tekee saman mielivaltaiselle vektorille v.

   Tehtävässä 2 saimme vektorin $v = (a, b, c, d)$ koordinaattivektoriksi kannan S suhteen

$$[v]_S = \begin{bmatrix} a - b \\ b - c \\ c - d \\ d \end{bmatrix}.$$

   Nyt suoraan laskemalla huomataan, että

$$A[v]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - b \\ b - c \\ c - d \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b + b - c + c - d + d \\ b - c + c - d + d \\ c - d + d \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = [v]_E$$

   Toisin sanoen matriisilla A kertomalla koordinaattivektoria $[v]_S$ saadaan koordinaattivektori $[v]_E$.

Jos merkitään $[v]_S = (a', b', c', d')$, saadaan yllä oleva tulos myös

$$\begin{aligned} A[v]_S &= A[a'v_1 + b'v_2 + c'v_3 + d'v_4]_S = a'A[v_1]_S + b'A[v_2]_S + c'A[v_3]_S + d'A[v_4]_S \\ &= a'[v_1]_E + b'[v_2]_E + c'[v_3]_E + d'[v_4]_E = [a'v_1 + b'v_2 + c'v_3 + d'v_4]_E = [v]_E; \end{aligned}$$

tässä on käytetty esityksen $[\cdot]_T$ lineaarisuusominaisuuksia ja tietoa $A[v_i]_S = [v_i]_E$. Yllä olevasta manipulaatiosta voi huomata tuloksen yleistyvän vähintäänkin seuraavasti: jos $S = (s_1, \ldots, s_n)$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta, niin matriisilla $A = [[s_1]_E \ \cdots \ [s_n]_E]$ on ominaisuus $A[v]_S = [v]_E$.

7. Jatkoa edellisiin tehtäviin. Selvitä matriisi B, jolla kertomalla vektorien v_1, v_2, v_3 ja v_4 koordinaattivektorit kannan E suhteen voidaan muuttaa koordinaattivektoreiksi kannan S suhteen.

   Ratkaisu: Tiedetään, että $A[v]_S = [v]_E$. Jos A on kääntyvä, saadaan tästä $A^{-1}[v]_E = [v]_S$, jolloin voidaan valita $B = A^{-1}$. Osoittautuu, että matriisilla A todella on käänteismatriisi:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

   Niinpä etsitty matriisi on

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (Kääntyvyys olisi voitu tarkistaa hieman yksinkertaisemmin laskemalla $\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$.)

   Itse asiassa kannanvaihtomatriisi on aina kääntyvä, joten käänteismatriisin löytyminen ei tule yllätyksenä.

8. Merkitään

$$w_1 = (1, -1, 0, 0),\ w_2 = (0, 1, -1, 0),\ w_3 = (0, 0, 1, -1) \text{ ja } w_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Tiedetään, että $T = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ on avaruuden $\mathbb{R}^4$ kanta. Etsi matriisi, jolla kertomalla vektorin $v = (a, b, c, d)$ koordinaattivektori kannan T suhteen voidaan muuttaa koordinaattivektoriksi kannan E suhteen.

Ratkaisu: Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^4$ kantaa

$$T = (w_1, w_2, w_3, w_4) = ((1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1)).$$

Haluamme löytää matriisin C, jolla $C[v]_T = [v]_E$ kaikilla avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoreilla v. Kuten tehtävissä 5 ja 6 huomattiin, riittää tämän takaamiseksi, että $C[w_i]_T = [w_i]_E$ kaikilla kannan T alkioilla w_i. Muistelemalla nyt millainen on esitys $[w_i]_T$, saadaan vaaditun ehdon toteuttavan matriisin C sarakkeiksi vektorit $[w_i]_E$. Toisin sanoen on oltava

$$C = \begin{bmatrix} [w_1]_E & [w_2]_E & [w_3]_E & [w_4]_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehtävän 6 ratkaisun loppuosassa todettiin, että näin muodostetulla matriisilla C on todella voimassa $C[v]_T = [v]_E$ kaikilla muillakin $v \in \mathbb{R}^4$; tätä kannattaa käydä läpi, jos asia ei ole vielä selvinnyt.

9. Jatkoa edelliseen tehtävään. Millä matriisilla kertomalla vektorin $v = (a, b, c, d)$ koordinaattivektori kannan E suhteen voidaan muuttaa koordinaattivektoriksi kannan T suhteen?

Ratkaisu: Taas $C[v]_T = [v]_E$, joten käänteimatriisille C^{-1} pätee $[v]_T = C^{-1}[v]_E$. Käänteismatriisi löydetään Lineaarialgebran ja matriisilaskennan kurssin tietojen avulla:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

jolloin C:n käänteismatriisi on

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Jatkoa edellisiin tehtäviin. Millä matriisilla kertomalla vektorin $v = (a, b, c, d)$ koordinaattivektori kannan S suhteen voidaan muuttaa koordinaattivektoriksi kannan T suhteen?

Ratkaisu: Etsitään sellaista matriisia D, jolla pätisi $D[v]_S = [v]_T$ kaikilla $v \in \mathbb{R}^4$. Tehtävän 6. nojalla tiedetään, että mielivaltaisella $v \in \mathbb{R}^4$ saadaan $A[v]_S = [v]_E$, ja edelleen tehtävän 9. nojalla vastaavasti $C^{-1}[v]_E = [v]_T$. Niinpä $C^{-1}A[v]_S = [v]_T$, joten etsimämme matriisi on $D = C^{-1}A$. Tämä on siis kannanvaihtomatriisi kannasta S kantaan T. Voimme laskea sen:

$$D = C^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Myöhemmissä tehtävissä etsimme lineaarikuvausten esityksiä eri kantojen suhteen; näitä merkitään kuvauksen L ja kantojen S ja T tapauksessa $[L]_{S,T}$. Kannanvaihtomatriisia voi ajatella erikoistapauksena tästä: kyseessä on identtisen kuvauksen esitys kantojen S ja T suhteen. Tästä lähtien näissä malleissa kannanvaihtomatriisia merkitäänkin $[\mathrm{id}]_{S,T}$.

Kannattaa huomata, että vastaavasti matriisille $D^{-1} = (C^{-1}A)^{-1} = A^{-1}C$ on

$$D^{-1}[v]_T = A^{-1}C[v]_T = A^{-1}[v]_E = [v]_S$$

eli D^{-1} on kannanvaihtomatriisi kannasta T kantaan S.

11.* Keksi kaksi erilaista avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantaa, joista kumpikaan ei ole luonnollinen kanta. Määritä kannanvaihtomatriisi kantojen välille.

Ratkaisu: Valitaan avaruudelle $\mathbb{R}^3$ kannat $S = ((1,1,0),(0,1,1),(0,1,0))$ ja $T = ((1,-1,0),(-1,0,1),(0,1,1))$. (Miksi nämä ovat kantoja?) Muodostetaan kannanvaihtomatriisi $[\mathrm{id}]_{S,T}$ etsimällä ensin matriisit $[\mathrm{id}]_{S,E}$ ja $[\mathrm{id}]_{E,T}$. Aiempien tehtävien nojalla

$$[\mathrm{id}]_{S,E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$[\mathrm{id}]_{T,E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisi $[\mathrm{id}]_{E,T}$ saadaan matriisin $[\mathrm{id}]_{T,E}$ käänteismatriisina:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Tästä saadaan siis

$$[\mathrm{id}]_{E,T} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Nyt kannanvaihtomatriisi kannasta S kantaan T saadaan tulona

$$[\mathrm{id}]_{S,T} = [\mathrm{id}_{E,T}][\mathrm{id}_{S,E}] = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12.* Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad L(a,b,c,d) = (-\frac{1}{2}a + b, a - b + 7d, a - d).$$

Kirjoita sen matriisi $[L]_{E_4,E_3}$ avaruuksien $\mathbb{R}^4$ ja $\mathbb{R}^3$ luonnollisten kantojen E_4 ja E_3 suhteen. Voit tarkistaa vastauksesi kertomalla saamallasi matriisilla kantavektoreita.

Ratkaisu: Lineaarikuvausten matriiseja etsittiin luonnollisten kantojen suhteen jo edellisen viikon tehtävissä. Silloin huomattiin, että lineaarikuvauksen L matriisin sarakkeina ovat kantavektoreiden kuvat. Nyt siis

$$\begin{aligned}[L]_{E_4,E_3} &= \Big[[L(1,0,0,0)] \quad [L(0,1,0,0)] \quad [L(0,0,1,0)] \quad [L(0,0,0,1)]\Big] \\ &= \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Voidaan vielä kokeilla mitä matriisi tekee esimerkiksi kantavektorille e_4:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Laskemalla

$$L(e_4) = (0, 7, -1)$$

huomataan, että kyseessä on todella koordinaattivektori $[L(e_4)]_{E_3}$.

13*. Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4, \quad L(a,b,c,d) = (4a - b - c - d, 3a - c - d, 2a - d, a).$$

Esitä lineaarikuvauksen L matriisi $[L]_E$ luonnollisen kannan suhteen. Esitä sitten kuvauksen matriisi $[L]_S$ tehtävässä 1 esitetyn kannan S suhteen. Käytä kannanvaihtomatriisia.

Ratkaisu: Olkoon $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineaarikuvaus,

$$L(a,b,c,d) = (4a - b - c - d, 3a - c - d, 2a - d, a).$$

Tämän matriisi luonnollisen kannan $E = E_4$ suhteen löydetään kuten aikaisemminkin valitsemalla sarakkeiksi vektorit $[L(e_i)]_E$; siis

$$[L]_E = \Big[[L(e_1)]_E \quad [L(e_2)]_E \quad [L(e_3)]_E \quad [L(e_4)]_E\Big] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehtävässä 1 annetulle kannalle S on etsitty kannanvaihtomatriisit $A = [\mathrm{id}]_{S,E}$ ja $A^{-1} = [\mathrm{id}]_{E,S}$ tehtävissä 6 ja 7. Näillä tiedoilla saadaan nyt

$$\begin{aligned}
[L]_S &= A^{-1}[L]_E A \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

14. Mitä kaikkea tiedät vektoriavaruuksien kannoista? Entä dimensiosta? Kerää tulokset yhteen.

    Ratkaisu: Ensimmäisissä harjoituksissa osoitettiin, että vektoriavaruuden vapaa jono voidaan aina pidentää kannaksi. Toisaalta jokaisesta virittäjäjonosta voidaan karsia vektoreita pois niin, että saadaan kanta.

    Jos vektoriavaruus on äärellisulotteinen, voidaan osoittaa, että sen kaikki kannat ovat samanpituisia. Tätä pituutta kutsutaan vektoriavaruuden dimensioksi. Tästä ja edellä mainituista tuloksista seuraa, että vapaa jono, jonka pituus on sama kuin avaruuden dimensio, on kanta. Lisäksi jono, jonka pituus on suurempi kuin avaruuden dimensio, ei voi olla vapaa. Toisaalta virittäjäjono, jonka pituus on sama kuin avaruuden dimensio, on kanta. Jono, jonka pituus on lyhyempi kuin kannan dimensio, ei voi virittää avaruutta.

15*. Oletetaan, että V on K-kertoiminen vektoriavaruus, jolla on aliavaruus U. Osoita, että myös U on K-kertoiminen vektoriavaruus. Selitä, miksi aliavaruus määritellään niin kuin se määritellään.

Ratkaisu:

Oletetaan siis, että V on K-kertoiminen vektoriavaruus ja $U \subset V$ sellainen osajoukko, että

1. $av \in U$ aina kun $a \in K$ ja $v \in U$,
2. $v + w \in U$ aina kun $u, w \in U$.
3. $0_V \in U$

Haluamme näyttää, että U on itsekin K-kertoiminen vektoriavaruus. Toisin sanoen seuraavien ehtojen on toteuduttava:

1. U suljettu yhteenlaskun suhteen: $a+b \in U$ kaikilla $a, b \in U$.
2. Yhteenlasku assosiatiivinen.
3. Neutraalialkio $0_V \in U$.
4. Alkiolla a vasta-alkio $-a$.
5. Summa vaihdannainen: $a+b=b+a$ kaikilla $a, b \in U$.
6. U suljettu skalaarikertolaskun suhteen
7. $1_K \cdot a = a$ kaikilla $a \in U$
8. $k(a+b) = ka + kb$ kaikilla $k \in K$ ja $a, b \in U$
9. $(k+k')a = ka + k'a$ kaikilla $k, k' \in K$ ja $a \in U$
10. $(kk')a = k(k'a)$ kaikilla $k, k' \in K$ ja $a \in U$.

(Näistä 5 ensimmäistä takaa, että U on vaihdannainen ryhmä, ja seuraavat 5, että skalaarikertolaskulla on tahtomamme ominaisuudet.)

Aliavaruudelle annettu määritelmä kattaa kohdat 1, 3 ja 6. Kohdat 2, 5, 7, 8, 9 ja 10 seuraavat suoraan siitä, että ne ovat voimassa koko avaruudelle V. Jäljelle jää vain kohta 4. Olkoon $a \in U$. On osoitettava, että a:lla on joukossa U vasta-alkio. Koska $-1_K \cdot a \in U$ ja

$$a + (-1_K \cdot a) = 1 \cdot a + (-1_K \cdot a) = (1-1) \cdot a = 0 \cdot a = 0,$$

on $-1_K \cdot a$ etsitty vasta-alkio.

Luonnollinen määritelmä aliavaruudelle olisi se, että aliavaruus on vektoriavaruus, joka sisältyy toiseen vektoriavaruuteen. Edellä tehdyt huomiot osoittavat, että tämä luonnollinen määritelmä on yhtäpitävä varsinaisen määritelmän kanssa. Riittää siis tarkistaa kolme ehtoa (lisäksi että ehdotettu aliavaruus on koko avaruuden osajoukko), ja tämä on paljon helpompaa kuin kaikkien vektoriavaruuden ehtojen läpi käyminen.

16*. Oletetaan, että $V = U + W$. Osoita, että $V = U \oplus W$ täsmälleen silloin, kun $U \cap W = \{0\}$.

Ratkaisu: Oletetaan siis, että U ja W ovat avaruuden V aliavaruuksia, ja $V = U + W$. Edellisen viikon tehtävissä osoitettiin, että jos $U \cap W = \{0\}$, niin summa on suora, eli $V = U \oplus W$. Tehtävän väitteestä puolet on siis jo todistettu. Näytettäväksi jää, että jos $U \cap W \neq \{0\}$, niin summa $U + W$ ei voi olla suora. Tämä nähdään helposti: jos $v \in U \cap W$ ja $v \neq 0$, saadaan vektorille v kaksi eri esitystä

$$v = 0 + v \in U + W, \qquad v = v + 0 \in U + W.$$

Koska $v \neq 0$, tämä rikkoo esityksen yksikäsitteisyyden, eikä $U + W$ siten voi olla suora summa.

17. Osoita, että vektoriavaruus $\mathbb{R}^4$ on aliavaruuksiensa

$$U = \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{ja} \quad W = \{(a, a, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

suora summa.

Ratkaisu: Merkitään $U = \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in R\}$ ja $W = \{(a, a, a, b) \mid a, b \in R\}$, jolloin määritelmän nojalla

$$U + W = \{(a_1 + a_2, b_1 + a_2, a_2, b_2) \mid a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Nopeasti nähdään, että kyseessä on koko $\mathbb{R}^4$: jos $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ y - z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

eli $(x, y, z, w) \in U + W$ ja siten $\mathbb{R}^4 \subset U + W$. Toisaalta $U + W \subset \mathbb{R}^4$ joten yhtäsuuruus vallitsee. Lisäksi $U \cap W = \{0\}$, joten edellisen tehtävän nojalla $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

18. Etsi jotkin kannat edellisen tehtävän avaruuksille U ja W. Muodosta näiden kantojen avulla kanta avaruudelle V.

Ratkaisu: Voidaan valita esimerkiksi

$$S = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$$

ja

$$T = ((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)),$$

jolloin S on avaruuden U ja T avaruuden W kanta. Silloin avaruudella

$$V = U \oplus W$$

on edellisen viikon tehtävien nojalla kanta

$$B = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

(Kyseessä on kantojen S ja T *konkatenaatio.*)

19. Osoita, että tehtävän 17 aliavaruudet U ja W ovat molemmat vakaita kuvauksessa

$$L\colon \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4, \quad (a, b, c, d) \mapsto (2b + c + 2d, -a + 2b + 2c + 2d, 3c + 2d, c + d).$$

Ratkaisu: Tarkastellaan kuvausta $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$L(a, b, c, d) = (2b + c + 2d, -a + 2b + 2c + 2d, 3c + 2d, c + d).$$

Jos $x \in U$, on x muotoa $x = (a, b, 0, 0)$, jolloin

$$L(x) = L(a, b, 0, 0) = (2b, -a + b, 0, 0) \in U.$$

Vastaavasti jos $x \in W$, on $x = (a, a, a, b)$ joillakin $a, b \in \mathbb{R}$ ja tällöin

$$L(x) = L(a, a, a, b) = (3a + 2b, 3a + 2b, 3a + 2b, a + b) \in W.$$

Siis avaruudet U ja W ovat molemmat vakaita kuvauksen L suhteen.

20. Jatkoa edelliseen. Nyt voidaan määritellä kuvaus $L_U \colon U \to U$, $u \mapsto L(u)$. Määritä kuvauksen L_U matriisi tehtävässä 18 löytämäsi kannan suhteen.

    Ratkaisu: Tarkastellaan määrittelyjoukkoa rajoittamalla saatua kuvausta $L_U : U \to U$. Haluamme löytää sen matriisin tehtävässä 18 valitun kannan S suhteen. Kannattaa huomata, ettei nyt voida ainakaan suoraan käyttää tehtävässä 13 käsiteltyä menetelmää matriisin $[L_U]_S$ löytämiseksi (koska U:lle ei ole ns. luonnollista kantaa).

    Kuten jo aikaisemmin on todettu, matriisi $[L_U]_S$ määräytyy täysin kantavektoreiden kuvien mukaan. On siis oltava $[L_U]_S[s]_S = [L_U(s)]_S$ kaikilla $s \in S$. Tulo $[L_U]_S[s]_S$ on tarkemmin katsoen matriisin $[L_U]_S$ i:s sarake. Siis

    $$[L_U]_S = \Big[[L(1, 0, 0, 0)]_S \quad [L(0, 1, 0, 0)]_S\Big]$$

    missä $L(1, 0, 0, 0) = (0, -1, 0, 0)$ ja $L(0, 1, 0, 0) = (2, 1, 0, 0)$, eli $[L(1, 0, 0, 0)]_S = (0, -1)$ ja $[L(0, 1, 0, 0)]_S = (2, 1)$. Niinpä

    $$[L_U]_S = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. Jatkoa edelliseen. Samalla tavalla voidaan määritellä kuvaus $L_W \colon W \to W$, $w \mapsto L(w)$. Määritä kuvauksen L_W matriisi löytämäsi kannan suhteen.

    Ratkaisu: Vastaavasti kuin yllä, on kuvauksen $L_W : W \to W$ esitys kannan T suhteen muotoa

    $$[L_W]_T = \Big[[L(1, 1, 1, 0)]_W \quad [L(0, 0, 0, 1)]_W\Big].$$

    Tässä $L(1, 1, 1, 0) = (3, 3, 3, 1)$ ja $L(0, 0, 0, 1) = (2, 2, 2, 1)$, eli $[L(1, 1, 1, 0)]_W = (3, 1)$ ja $[L(0, 0, 0, 1)]_W = (2, 1)$. Niinpä kuvauksen L_W matriisi kannan T suhteen on

    $$[L_W]_T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

22. Jatkoa edelliseen. Määritä lopuksi kuvauksen L matriisi tehtävässä 18 löytämäsi avaruuden $\mathbb{R}^4$ kannan suhteen.

Ratkaisu:

Tarkastellaan vielä kuvausta $L : V \to V$ tehtävässä 18 löydetyn kannan B suhteen. Taas rittää määrittää kannan B vektoreiden kuvien koordinaattivektorit samaisessa kannassa B. Pienellä työllä voi vakuuttua siitä, että jos avaruuden U alkioille u pätee $[u]_S = (a, b)$, niin $[u]_B = (a, b, 0, 0)$. Vastaavasti, jos $w \in W$ ja $[w]_T = (a, b)$, niin $[w]_B = (0, 0, a, b)$. Koska U ja W ovat vakaita, saadaan nyt

$$[L(1,0,0,0)]_B = (0,-1,0,0), \qquad [L(0,1,0,0)]_B = (2,1,0,0)$$

ja

$$[L(1,1,1,0)]_B = (0,0,3,1), \qquad [L(0,0,0,1)]_B = (0,0,2,1).$$

Siis

$$[L]_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tätä kannattaa verrata matriiseihin $[L_U]_S$ ja $[L_W]_T$.

Edelliset tehtävät kertovat jotakin hyvin olennaista vakaista aliavaruuksista ja niiden muodostamista suorista summista. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Oletetaan, että V voidaan kirjoittaa suorana summana aliavaruuksista, jotka ovat vakaita kuvauksen L suhteen: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$. Tällöin kuvauksen L matriisi on mahdollista kirjoittaa hyvin siistissä muodossa. Valitaan avaruudelle V kanta, joka muodostuu aliavaruuksien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ kannoista. Kun kuvauksen L matriisi kirjoitetaan tämän kannan suhteen, muodostuu matriisiin diagonaalille niin kutsuttuja blokkeja, jotka vastaavat vakaita aliavaruuksia. Blokkien ulkopuolella matriisissa on pelkkiä nollia. Nollat kuvaavat sitä, että aliavaruudet ovat vakaita, eivätkä niiden vektorit siksi kuvaudu aliavaruuksien ulkopuolelle. Koska matriisissa on paljon nollia sekä käteviä blokkeja, on sitä hyvin mukava käsitellä.

23*. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Oletetaan, että $v \in V$. Osoita, että aliavaruus $\operatorname{span}(v, L(v), L^2(v), L^3(v), \ldots)$ on vakaa kuvauksessa L.

Olkoon L lineaarikuvaus $V \to V$. Oletetaan, että $v \in V$. Merkitään $A = \{v, L(v), L(L(v)), \ldots\}$. Jos $v' \in \operatorname{span} A$, on määritelmän myötä jollakin äärellisellä n voimassa $v' = \sum_{i=0}^{n} a_i L^i(v)$, missä $a_i \in K$. Nyt

$$L(v') = a_i \sum_{i=0}^{n} L^{i+1}(v) = 0 \cdot v + a_0 L(v) + a_1 L^2(v) + \ldots + a_n L^{n+1}(v) \in \operatorname{span} A,$$

joten span A on vakaa kuvauksen L suhteen.

24*. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $L(a,b) = (b,a)$. Määritä kuvauksen kaikki ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit. Käytä ominaisarvon määritelmää.

Ratkaisu: Tarkastellaan siis kuvausta $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a,b) = (b,a)$. Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ on sen ominaisarvo, on jollakin $(a,b) \neq (0,0)$ voimassa $L(a,b) = \lambda(a,b)$, eli $(b,a) = (\lambda a, \lambda b)$. Tällöin on oltava $a = \lambda b = \lambda(\lambda a)$ ja $b = \lambda a = \lambda(\lambda b)$, josta tiedon $(a,b) \neq 0$ nojalla saadaan $1 = \lambda^2$. Siis $\lambda = \pm 1$. Tutkitaan vielä ovatko nämä molemmat todella ominaisarvoja.

Ainakin $L(1,1) = 1 \cdot (1,1)$, eli 1 on ominaisarvo. Vastaavat ominaisvektorit ovat ne (a,b), joilla $(b,a) = (a,b)$; siis täsmälleen muotoa (a,a) olevat (nollasta poikkeavat) vektorit.

Vastaavasti $L(1,-1) = (-1,1) = -(1,-1)$, joten myös -1 on ominaisarvo. Jos $L(a,b) = (b,a) = -(a,b) = (-a,-b)$, niin $b = -a$, joten mahdollisia ominaisvektoreita ovat muotoa $(a,-a)$ olevat alkiot; nollaa lukuunottamatta nämä todella ovat ominaisvektoreita, sillä $L(a,-a) = (-a,a) = -(a,-a)$.

25*. Osoita, että lineaarikuvauksen ominaisavaruudet ovat vakaita.

Ratkaisu: Oletetaan, että L on lineaarikuvaus ja λ sen ominaisarvo. Olkoon O kaikkien λ:aa vastaavien ominaisvektorien joukko. Ominaisarvoa λ vastaava ominaisavaruus on kaikkien ominaisvektorien virittämä aliavaruus $\operatorname{span}(O)$. Haluamme näyttää sen vakaaksi kuvauksen L suhteen. Jos

$$v' \in \operatorname{span}(O),$$

on $v' = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ joillakin $a_i \in K$ ja $v_i \in O$, ja tällöin

$$L(v') = L(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = \sum_{i=1}^n a_i L(v_i) = \sum_{i=1}^n (a_i \lambda) v_i$$

eli $L(v') \in \operatorname{span}(O)$. Siis ominaisavaruus todella on vakaa kuvauksen L suhteen.

Huomaa, että ominaisavaruus on itse asiassa joukko $O \cup \{0\}$. (Tätä ei ole vaikea osoittaa.) Ominaisavaruudessa ei siis ole muita vektoreita kuin ominaisvektorit sekä nolla. Toisin sanoen samaa ominaisarvoa vastaavista ominaisvektoreista muodostettu lineaarikombinaatio on myös ominaisvektori.

Tehtävät 26 ja 27 siirrettiin harjoitukseen 4. Ratkaisuehdotukset esitetään tuonnempana.