Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 5
Ratkaisuehdotus suullisiin tehtäviin

Tehtävissä 1–7 avaruus V on K-kertoiminen vektoriavaruus, jonka dimensio on n, ja $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus.

4. Osoita, että jos $L^k = 0$ jollain k, niin $L^n = 0$. (Muista, että $n = \dim V$.)

Ratkaisu. Todistetaan väite aluksi muodossa

”Jos $L^k v = 0$ jollain k ja jollain $v \in V$, niin $L^n v = 0$.”

Tätä muotoa on sitten helpompi käyttää seuraavissa tehtävissä. Oletetaan siis, että $L^k v = 0$ pätee jollakin positiivisella kokonaisluvulla k ja jollakin $v \in V$. (Huomaa, että jos $k = 0$, niin $L^k = I$, jolloin $v = 0$ ja väite pätee triviaalisti. Toisaalta, jos k on negatiivinen, niin L on kääntyvä, mistä myös seuraa, että $v = 0$.) Lisäksi voidaan olettaa, että k on pienin positiivinen kokonaisluku, jolla yhtälö pätee.

Edellisen tehtävän perusteella jono $(v, Lv, \dots, L^{k-1}v)$ on vapaa. Tämä tarkoittaa sitä, että avaruuden dimensio on vähintään k (koska vapaa jono voidaan aina täydentää kannaksi). Nyt

$$L^n v = L^{n-k}(L^k v) = L^{n-k}(0) = 0,$$

joten väitteen uusi muotoilu pätee.

Alkuperäinen väite seuraa nyt helposti: Oletetaan, että $L^k = 0$ jollain k. Olkoon $v \in V$ mielivaltainen, jolloin $L^k v = 0$. Yllä todistetun nojalla pätee $L^n v = 0$. Koska v oli mielivaltainen, sama yhtälö pätee kaikilla $v \in V$, joten $L^n = 0$.

6. Osoita, että aliavaruudet $\operatorname{Ker}(L - \lambda I)^n$ ja $\operatorname{Im}(L - \lambda I)^n$ ovat vakaita kuvauksessa L.

Ratkaisu. Oletetaan ensin, että $v \in \operatorname{Ker}(L - \lambda I)^n$, ja osoitetaan, että myös $Lv \in \operatorname{Ker}(L - \lambda I)^n$. On siis osoitettava, että $(L - \lambda I)Lv = 0$. Huomataan, että $(x - \lambda)^n$ on jokin K-kertoiminen polynomi, joten

$$(x - \lambda)^n x = x(x - \lambda)^n.$$

Sijoittamalla yllä olevassa yhtälössä muuttujan x paikalle L ja käyttämällä tietoa $v \in \operatorname{Ker}(L-\lambda I)^n$ saadaan

$$(L-\lambda I)^n Lv = L(L-\lambda I)^n v = L(0) = 0.$$

Täten $Lv \in \operatorname{Ker}(L-\lambda I)^n$, eli aliavaruus $\operatorname{Ker}(L-\lambda I)$ on vakaa kuvauksessa L.

Toinen väite osoitetaan samalla tavalla. Oletetaan, että $v \in \operatorname{Im}(L-\lambda I)^n$, jolloin löytyy jokin $w \in V$, jolle pätee $v = (L-\lambda I)^n w$. Nyt

$$Lv = L(L-\lambda I)^n w = (L-\lambda I)^n Lw.$$

Siispä Lv on alkion Lw kuva kuvauksessa $(L-\lambda I)^n$, joten $Lv \in \operatorname{Im}(L-\lambda I)^n$.

7. Oletetaan, että λ on L:n ominaisarvo. Osoita, että

$$V = \operatorname{Ker}(L-\lambda I)^n \oplus \operatorname{Im}(L-\lambda I)^n.$$

Ratkaisu. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi $L-\lambda I = T$. Oletetaan, että $v \in \operatorname{Ker} T^n \cap \operatorname{Im} T^n$. Tästä seuraa, että $T^n v = 0$ ja toisaalta $v = T^n w$ jollain $w \in V$. Siispä

$$0 = T^n v = T^n(T^n w)) = T^{2n} w.$$

Tehtävästä 4 seuraa nyt, että $T^n w = 0$ eli $v = 0$. Täten $\operatorname{Ker} T^n \cap \operatorname{Im} T^n = \{0\}$. Siten summa $\operatorname{Ker} T^n + \operatorname{Im} T^n$ on suora. On vielä osoitettava, että tämä summa on koko avaruus V.

Dimensiolauseen perusteella $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T^n + \dim \operatorname{Im} T^n$. Toisaalta harjoituksen 1 tehtävän 13 nojalla avaruuden $\operatorname{Ker} T^n \oplus \operatorname{Im} T^n$ dimensio on $\dim \operatorname{Ker} T^n + \dim \operatorname{Im} T^n$. Koska avaruuksien V ja $\operatorname{Ker} T^n \oplus \operatorname{Im} T^n$ dimensiot ovat samat ja toinen on toisen aliavaruus, saadaan $V = \operatorname{Ker} T^n \oplus \operatorname{Im} T^n$.

8. Olkoon V äärellisulotteinen kompleksikertoiminen vektoriavaruus, ja olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Osoita, että

$$V = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k},$$

missä $k \in \mathbb{N}$ ja kukin V_{λ_i} on ominaisarvoon λ_i liittyvä yleistetty ominaisavaruus.

Ratkaisu. Merkitään $n = \dim V$. Tapauksessa $n = 1$ jokainen lineaarikuvaus on muotoa $Lv = \lambda v$ jollain $\lambda \in \mathbb{C}$, joten väite pätee selvästi. Oletetaan sitten, että $n > 1$ ja seuraava induktio-oletus pätee:

> Jos W on $\mathbb{C}$-kertoiminen vektoriavaruus, $\dim W < n$ ja $M\colon W \to W$ on lineaarikuvaus, niin $W = W_{\lambda_1} + \cdots + W_{\lambda_k}$, missä $k \in \mathbb{N}$ ja kukin W_{λ_i} on ominaisarvoon λ_i liittyvä kuvauksen M yleistetty ominaisavaruus.

Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Koska V on kompleksikertoiminen, on L:llä vähintään yksi ominaisarvo λ (ks. harjoituksen 3 tehtävä 14). Tehtävän 5 nojalla tähän liittyvä yleistetty ominaisavaruus on $V_\lambda = \mathrm{Ker}(L - \lambda I)^n$. Tehtävän 7 perusteella V on suora summa avaruudesta V_λ ja kuva-avaruudesta $W = \mathrm{Im}(L - \lambda I)^n$. Lisäksi W on tehtävän 6 mukaan vakaa kuvauksessa L.

Koska avaruus V_λ on epätriviaali, sen dimensio m on vähintään 1. Edelleen, koska $V = V_\lambda \oplus W$, nähdään että $\dim W = n - m < n$ (voitaisiin myös käyttää dimensiolausetta). Tarkastellaan kuvauksen L rajoittumaa $L|_W\colon W \to W$ (tähän tarvitaan joukon W vakautta). Koska rajoittuma on pienempiulotteisen avaruuden W lineaarikuvaus, induktio-oletuksen perusteella W on summa kuvauksen $L|_W$ yleistetyistä ominaisavaruuksista $W_{\lambda_1}, \ldots, W_{\lambda_k}$.

Jos nyt $w \in W_{\lambda_i}$, niin $(L|_W - \lambda_i I)^n w = 0$. Koska $L|_W$ antaa samat arvot kaikille avaruuden W vektoreille kuin L, nähdään että myös $(L - \lambda_i I)^n w = 0$ (esimerkiksi kertomalla sulut auki). Näin ollen w on myös kuvauksen L yleistetty ominaisvektori.

Olkoon lopulta $v \in V$. Nyt v voidaan esittää summana $v_1 + w$, missä $v_1 \in V_\lambda$ ja $w \in W$. Edelleen w voidaan esittää summana $w_1 + \cdots + w_k$, missä $w_i \in W_{\lambda_i}$ jokaisella i. Nyt sekä v_1 että jokainen w_i ovat kuvauksen L yleistettyjä ominaisvektoreita, joten V on summa yleistetyistä ominaisavaruuksista.

9. Ratkaistuasi liniksen jatkokurssin kaikkien aikojen vaativimman tehtävän, kissasi kaatoi kahvikupin muistiinpanojesi päälle. Vain alla olevat rivit säilyivät lukukelpoisina. Täydennä muistiinpanot.

Ratkaisu. Täydennykset on laitettu hakasulkuihin.

Väite: [Matriisin A eri ominaisarvoja vastaavat yleistetyt ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.]

Todistus: Olkoot $v_i, \ldots, v_m$ yleistettyjä ominaisvektoreja, jotka vastaavat eri ominaisarvoja $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Oletetaan, että

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0.$$

Osoitetaan, että $a_1 = 0$. Olkoon k pienin kokonaisluku, jolla [$(A - \lambda_1 I)^k v_1 = 0$.] Koska kaikilla i pätee $(A - \lambda_i I)^n v_i = 0$, missä $n =$ [$\dim V$, nähdään että]

$$\begin{aligned} 0 &= (A - \lambda_1 I)^{k-1}(A - \lambda_2 I)^n \cdots (A - \lambda_m I)^n \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \\ &= [a_1 (A - \lambda_1 I)^{k-1}(A - \lambda_2 I)^n \cdots (A - \lambda_m I)^n v_1.] \end{aligned}$$

Viimeisessä tulossa jokainen termi $(A - \lambda_i)^n$ voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\Big((A - \lambda_1 I) + (\lambda_1 - \lambda_i)I\Big)^n = (A - \lambda_1 I)B_i + (\lambda_1 - \lambda_i)^n I,$$

missä B_i [on jokin lineaarikuvaus.] Näin ollen

$$0 = a_1(\lambda_1 - \lambda_2)^n \cdots (\lambda_1 - \lambda_m)^n (A - \lambda_1 I)^{k-1} v_1.$$

Koska [$(A - \lambda_1 I)^{k-1} v_1 \neq 0$ ja $(\lambda_1 - \lambda_i) \neq 0$ kaikilla $i \neq 1$,] täytyy olla $a_1 = 0$. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että $a_i = 0$ kaikilla i, joten [vektorit $v_1, \ldots, v_m$ ovat lineaarisesti riippumattomat.]

13. Varmista, että pistetuloa vastaava matriisi luonnollisen kannan suhteen kirjoitettuna on ykkösmatriisi.

Ratkaisu: Olkoon $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta. Tällöin

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Koska muotoa vastaava matriisi saadaan asettamalla arvo $B(e_i, e_j)$ matriisin paikkaan (i, j), on kyseessä ykkösmatriisi.

14. Keksi kaksi symmetristä bilineaarista muotoa avaruudelta $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ kuntaan $\mathbb{R}$. Voit vaikka ensin keksiä muotojen matriisit ja johtaa sitten niistä kuvauksen kaavan. Käytä mielikuvitustasi.

Ratkaisu: Olkoon muodon $B\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ matriisi luonnollisen kannan suhteen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jos $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, saadaan arvo $B((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ kaavasta

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [x_1 y_1 - x_2 y_2].$$

Siis $B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$

Olkoon muodon $B'\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ matriisi luonnollisen kannan suhteen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jos $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, saadaan arvo $B'((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ kaavasta

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2].$$

Siis $B'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$.

15. Määritä edellisessä tehtävässä keksimiesi kuvausten matriisit luonnollisen kannan sekä kannan $((1,1),(1,-1))$ suhteen.

Ratkaisu: Luonnollisen kannan suhteen matriisit on jo määritetty. Siirrytään siis kantaan $S = ((1,1),(1,-1))$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} B((1,1),(1,1)) &= 1-1=0, \\ B((1,1),(1,-1)) &= 1+(-1)=2 \\ B((1,-1),(1,-1)) &= 1-1=0. \end{aligned}$$

Koska muoto on symmetrinen, pätee $B((1,-1),(1,1)) = B((1,1),(1,-1)) = 2$. Näin matriisiksi saadaan

$$[B]_S = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Määritetään sitten muodon B' matriisi kannan S suhteen. Nyt

$$\begin{aligned} B'((1,1),(1,1)) &= 2+1+1+2=6, \\ B'((1,1),(1,-1)) &= 2+1-1-2=0 \\ B'((1,-1),(1,-1)) &= 2-1-1+2=2. \end{aligned}$$

Näin matriisiksi saadaan

$$[B']_S = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Myös bilineaaristen muotojen matriisiesityksiä käsiteltäessä voidaan käyttää kannanvaihtomatriiseja. Tilanne on kuitenkin hieman erilainen kuin lineaarikuvausten tapauksessa. Jos P on kannanvaihtomatriisi kannasta S kantaan R, pätee yhtälö $[B]_S = P^T[B]_R P$. Tällä kertaa tarvitaan siis kannanvaihtomatriisin transpoosia. Voit itse miettiä, miksi tulos pätee.

17. Määritä keksimiäsi symmetrisiä bilineaarisia muotoja vastaavavat neliömuodot.

Ratkaisu: Olkoon $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neliömuoto, joka saadaan bilineaarisesta muodosta B. Tällöin

$$Q(x_1,x_2) = B(x_1,x_1) = x_1^2 - x_2^2 \quad \text{kaikilla } (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Olkoon $Q'\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neliömuoto, joka saadaan bilineaarisesta muodosta B'. Tällöin

$$Q'(x_1,x_2) = B'(x_1,x_1) = 2x_1^2 + x_2x_1 + x_1x_2 + 2x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

kaikilla $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.