Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 5
Ratkaisuehdotus kirjallisiin tehtäviin

Tehtävissä 1–10 avaruus V on K-kertoiminen vektoriavaruus, jonka dimensio on n, ja $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus.

1*. Oletetaan, että vektorijono $(v_1, \ldots, v_l)$ on aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta ja jono $(v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_m)$ puolestaan V:n kanta. Osoita, että jono $(Lw_1, \ldots, Lw_m)$ on aliavaruuden $\operatorname{Im} L$ kanta.

Ratkaisu: Näytetään, että jono $(L(w_1), \ldots, L(w_m))$ on vapaa ja virittää avaruuden $\operatorname{Im} L$. Tavalliseen tapaan lähdetään liikkeelle oletuksesta

$$a_1L(w_1) + a_2L(w_2) + \ldots + a_mL(w_m) = 0,$$

missä $a_i \in K$. Koska L on lineaarikuvaus, tästä seuraa, että

$$L(a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_mw_m) = 0.$$

Nyt $a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_mw_m \in \operatorname{Ker} L$, joten

$$a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_mw_m = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_lv_l$$

joillakin $b_i \in K$. Tästä saadaan

$$a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_mw_m - b_1v_1 - b_2v_2 - \cdots - b_lv_l = 0.$$

Koska $(v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_m)$ on kanta, täytyy kaikkien kerrointen olla nollia, joten erityisesti $a_i = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, l$. Siispä jono $(L(w_1), \ldots, L(w_m))$ on vapaa.

Näytetään vielä, että $\operatorname{span} L(w_1), \ldots, L(w_m) = \operatorname{Im} L$. Olkoon $v' \in \operatorname{Im} L$. Tällöin $v' = L(v)$ jollakin v ja edelleen

$$L(v) = L(c_1v_1 + \cdots + c_lv_l + d_1w_1 + \cdots + d_mw_m)$$

joillakin kertoimilla $c_i, d_j \in K$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} L(v) &= c_1L(v_1) + \ldots + c_lL(v_l) + d_1L(w_1) + \ldots + d_mL(w_m) \\ &= d_1L(w_1) + \cdots + d_mL(w_m), \end{aligned}$$

sillä $L(v_i) = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, l$. Erityisesti siis v' on lineaarikombinaatio alkioista $L(w_1), \ldots, L(w_m)$, joten $\operatorname{Im} L \subset \operatorname{span} L(w_1), \ldots, L(w_m)$, mikä piti todistaa.

2* Osoita *dimensiolause*:

$$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V.$$

Ratkaisu: Olkoon V edelleen n-ulotteinen avaruus ja $L : V \to V$ sen lineaarikuvaus. Valitaan aliavaruudelle $\operatorname{Ker} L$ jokin kanta $(v_1, \dots, v_l)$. Tämä on avaruuden V vapaa jono, joka voidaan edelleen täydentää koko avaruuden kannaksi

$$(v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_m).$$

Nyt ollaan edellisen tehtävän tilanteessa, joten tiedämme kuvavektoreiden jonon $(L(w_1), \dots, L(w_m))$ muodostavan avaruuden $\operatorname{Im} L$ kannan. Niinpä

$$n = \dim V = l + m = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L.$$

3*. Olkoon $v \in V$. Oletetaan, että eräällä positiivisella kokonaisluvulla k pätee $L^k v = 0$, ja lisäksi k on pienin luku, jolla yhtälö pätee. Osoita, että vektorijono

$$(v, Lv, L^2 v, \dots, L^{k-1} v)$$

on vapaa.

Ratkaisu: Oletetaan, että

$$a_0 v + a_1 L v + \ldots + a_{k-1} L^{k-1} v = 0 \tag{0.1}$$

Joillakin $a_i \in K$. Haluamme näyttää, että $a_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Jos tämä ei päde, voidaan valita pienin i, jolla pätee $a_i \neq 0$. Yhtälö (0.1) saadaan tällöin muotoon

$$a_i L^i(v) + a_{i+1} L^{i+1}(v) + \ldots + a_{k-1} L^{k-1}(v) = 0.$$

Nyt

$$\begin{aligned} 0 = L^{k-1-i}(0) &= L^{k-1-i}(a_i L^i(v) + a_{i+1} L^{i+1}(v) + \ldots + a_{k-1} L^{k-1}(v)) \\ &= a_i L^{k-1}(v) + a_{i+1} L^k(v) + \ldots + a_{k-1} L^{2k-2-i}(v) = a_i L^{k-1}(v), \end{aligned}$$

sillä $L^s(v) = 0$ kaikilla $s \geq k$. Koska $L^{k-1}(v) \neq 0$, täytyy olla $a_i = 0$, mikä on ristiriita. Siispä vastaoletus johti ristiriitaan, joten jono $(v, L(v), \dots, L^{k-1}(v))$ on vapaa. Siten väite on todistettu.

Tehtävän väite voidan todistaa myös hieman eri tavalla. Oletukseen

$$a_0 v + a_1 L v + \ldots + a_{k-1} L^{k-1} v = 0$$

voidaan nimittäin soveltaa kuvausta L^{k-1} puolittain, jolloin saadaan samoin perustein kuin yllä yhtälö

$$a_0 L^{k-1}(v) = 0.$$

Tästä päätellään oletuksen $L^{k-1}(v) \neq 0$ avulla, että $a_0 = 0$, jolloin yhtälö (0.1) tulee muotoon

$$a_1 Lv + \ldots + a_{k-1} L^{k-1} v = 0.$$

Seuraavaksi sovelletaan kuvausta L^{k-2} ja saadaan $a_1 = 0$ jne. Näin voidaan induktiivisesti näyttää jokainen kerroin nollaksi, mikä todistaa väitteen.

5*. Osoita, että avaruuden V aliavaruus on kuvauksen L yleistetty ominaisavaruus, jos ja vain jos se on muotoa $\mathrm{Ker}(L - \lambda I)^n$, missä $\lambda \in K$.

Ratkaisu: Yleistetyt ominaisavaruudet liittyvät aina johonkin ominaisarvoon. Niistä ei ole mielekästä puhua, jos ei mainitse avaruuteen liityvää ominaisarvoa.

Oletetaan, että U_λ on kuvauksen L ominaisarvoon $\lambda \in K$ liittyvä yleistetty ominaisavaruus. Toisin sanoen

$$U_\lambda = \left\{ v \in V \mid (L - \lambda I)^k v = 0 \text{ jollakin } k \right\}.$$

Osoitetaan, että $U_\lambda = \mathrm{Ker}(L - \lambda I)^n$.

Olkoon $v \in U_\lambda$. Tehtävän 4 perusteella tiedämme, että $(L - \lambda I)^n v = 0$. Tästä seuraa, että $v \in \mathrm{Ker}(L - \lambda I)^n$. Oletetaan sitten, että $v \in \mathrm{Ker}(L - \lambda I)^n$. Nyt $(L - \lambda I)^n v = 0$, joten $v \in U_\lambda$. Siten väite on todistettu.

10. Olkoon V äärellisulotteinen kompleksikertoiminen vektoriavaruus, ja olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Osoita, että avaruudella V on kanta

$$S = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,m_1},\ v_{2,1}, \ldots, v_{2,m_2},\ \cdots,\ v_{k,1}, \ldots, v_{k,m_k}),$$

missä kukin osajono $(v_{i,1}, \ldots, v_{i,m_i})$ on yleistetyn ominaisavaruuden V_{λ_i} kanta. Kuvaile, miltä kuvauksen L matriisi näyttää kannassa S.

Ratkaisu: Olkoon V äärellisulotteinen avaruus ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sen eri ominaisarvot. Tehtävän 8 nojalla

$$V = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_n},$$

missä V_{λ_i} on ominaisarvoa λ_i vastaava yleistetty ominaisavaruus. Olkoon jokaisella $i = 1, \ldots, n$ jono $(v_{i,1}, \ldots, v_{i,m_i})$ yleistetyn ominaisavaruuden V_{λ_i} kanta. Tällöin yhdistämällä saatu jono

$$S = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,m_1}, v_{2,1}, \ldots, v_{2,m_2}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,m_k})$$

virittää avaruuden V

Osoitetaan vielä, että jono on vapaa. Oletetaan, että

$$a_{1,1}v_{1,1} + \ldots + a_{1,m_1}v_{1,m_1} + \ldots + a_{k,1}v_{k,1} + \ldots + a_{k,m_k}v_{m_k} = 0$$

joillakin $a_{i,j} \in K$. Merkitään $v_i = a_{i,1}v_{i,1} + \ldots + a_{i,m_i}v_{i,m_i}$. Jokainen v_i on siis avaruuden V_{λ_i} alkio. Nyt

$$v_1 + \ldots + v_n = 0. \tag{0.2}$$

Tehtävän 9 perusteella jokainen eri ominaisarvoja vastaavien yleistettyjen ominaisvektoreiden muodostama jono on vapaa. Vektorit v_i ovat yleistetyissä ominaisavaruuksissa, mutta ne eivät yhtälön (0.2) ja edellä todetun nojalla voi olla yleistettyjä ominaisvektoreita. Siten niiden täytyy olla nollia. Siksi $v_i = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.

Vektorit $v_{i,1} + \ldots + v_{i,m_i}$ puolestaan muodostavat kannan, joten tästä seuraa, että $a_{i,j} = 0$ kaikilla i ja j. Näin ollen S on vapaa.

Koska jokainen yleistetty ominaisavaruus on vakaa ja avaruus on niiden suora summa, on kuvauksen L matriisi yllä löydetyn kannan suhteen hyvin yksinkertaisen näköinen. Matriisi koostuu blokeista, jotka ovat matriisin lävistäjällä. Jokainen blokki vastaa yhtä yleistetyistä ominaisavaruuksista.

Tutkitaan vaikkapa avaruutta V_{λ_i}. Sen kanta-alkion $v_{i,j}$ kuva on $L(v_{i,j})$ on edelleen avaruudessa V_{λ_i}. Kun $L(v_{i,j})$ esitetään lineaarikombinaationa kannan alkioista, ovat kaikkien muiden paitsi avaruuden V_{λ_i} kantavektoreiden kertoimet nollia. Toisin sanoen koordinaattivektorissa $[L(v_{i,j})]_S$ ainoastaan aliavaruuden V_{λ_i} kohdalla olevat alkiot poikkeavat nollasta. Koska matriisin $[L]_S$ sarakkeina ovat vektorit $[L(v_{i,j})]_S$, muodostuu $[L]_S$ blokeista, jotka vastaavat aliavaruuksia V_{λ_i}. Kunkin blokin koko on sama kuin vastaavan aliavaruuden dimensio.

11. * Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulo $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $B(v, w) = v \cdot w$ on bilineaarinen muoto. Onko se symmetrinen?

Ratkaisu: Käydään läpi bilineaarisen muodon ehdot. Olkoot $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ ja $u = (u_1, \ldots, u_n)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita ja $a \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

1.

$$\begin{aligned} B(v + w, u) &= (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n) \cdot (u_1, \ldots, u_n) \\ &= (v_1 + w_1)u_1 + \ldots (v_n + w_n)u_n \\ &= v_1u_1 + \ldots + v_nu_n + w_1u_1 + \ldots + w_nu_n = B(v, u) + B(w, u), \end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
B(v, w+u) &= (v_1, \ldots, v_n) \cdot (w_1 + u_1, \ldots, w_n + u_n) \\
&= v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n + v_1 u_1 + \ldots + v_1 u_1 = B(v, w) + B(v, u),
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
B(av, w) &= (av_1, \ldots, av_n) \cdot (w_1, \ldots, w_n) \\
&= av_1 w_1 + \ldots + av_n w_n = a(v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n) = aB(v, w),
\end{aligned}
$$

4.

$$
B(v, aw) = v_1 a w_1 + \ldots + v_n a w_n = a(v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n) = aB(v, w).
$$

Tämä bilineaarinen muoto on symmetrinen, sillä tunnetusti pistetulon arvo ei riipu vektoreiden järjestyksestä: kaikilla $v, w \in \mathbb{R}^n$ pätee $v \cdot w = w \cdot v$ eli $B(v, w) = B(w, v)$. Tämä voidaan perustella laskemalla

$$
\begin{aligned}
v \cdot w &= (v_1, \ldots, v_n) \cdot (w_1, \ldots, w_n) = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n \\
&= w_1 v_1 + \ldots + w_n v_n = w \cdot v.
\end{aligned}
$$

12. * Tutkitaan $n \times n$-matriisia A ja $n \times 1$ matriisia $e_i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^T$, missä luku 1 on paikassa i. Miltä näyttää tulo $e_i^T A e_j$? Miten tämä perustelee sen, että bilineaarisen kuvauksen matriisi muodostettiin yllä kuvatulla tavalla?

Ratkaisu: Olemme jo aikaisemmissa laskuharjoituksissa huomanneet, että Ae_j on j:s sarake matriisissa A. Merkitään tätä saraketta A_j. Jos vektoria A_j kerrotaan vasemmalta matriisilla e_i^T, saadaan tulokseksi i:s alkio vektorissa A_j. Siis $e_i^T A e_j$ on matriisin i:nnen rivin j:s alkio matriisissa. Kyseessä on siis alkio, joka on paikassa (i, j). Toisin sanoen kertominen poimii matriisista paikassa (i, j) olevan alkion.

Tehtävää edeltäneessä osiossa kerrottiin, että bilineaarisen kuvauksen matriisin $[B]_S$ paikassa (i, j) olevan alkion tulee olla kuvapiste $B(v_i, v_j)$, missä v_i ja v_j ovat kannan S alkioita. Tässä tapauksessa $[v_i]_S = e_i$ ja $[v_j]_S = e_j$, jolloin yllä olevan nojalla

$$
[v_i]_S^T [B]_S [v_j]_S = e_i^T [B]_S e_j = B(v_i, v_j).
$$

Kantavektorit kuvautuvat siis oikein. Koska kantavektorit määräävät bilineaarisen kuvauksen, tämän jälkeen kaikki muutkin vektorit kuvautuva niin kuin oli tarkoitus.

Tässä vielä todistus viimeiselle väitteelle. Olkoon $S = (v_i, v_2, \ldots, v_n)$ avaruuden V kanta. Oletetaan, että $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ ja $w = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n$, missä $a_i, b_i \in K$. Nyt

$$\begin{aligned}
&[v]_S^T[B]_S[w]_S = [a_1v_1 + \ldots + a_nv_n]_S^T[B]_S[b_1v_1 + \ldots + b_nv_n]_S \\
&= [a_1v_1 + \ldots + a_nv_n]_S^T[B]_S(b_1[v_1]_S + \ldots + b_n[v_n]_S) \\
&= a_1[v_1]_S^T[B]_S(b_1[v_1]_S + \ldots + b_n[v_n]_S) + \ldots + a_n[v_n]_S[B]_S(b_1[v_1]_S + \ldots + b_n[v_n]_S) \\
&= a_1b_1[v_1]_S^T[B]_S[v_1]_S + \ldots + a_1b_n[v_1]_S^T[B]_S[v_n]_S + \\
&\quad \ldots + a_nb_1[v_n]_S^T[B]_S[v_1]_S + \ldots + a_nb_n[v_n]_S^T[B]_S[v_n]_S \\
&= a_1b_1B(v_1, v_1) + \ldots + a_1b_nB(v_1, v_n) + \ldots + a_nb_1B(v_n, v_1) + \ldots + a_nb_nB(v_n, v_n) \\
&= B(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n, b_1v_1 + \ldots + b_nv_n) = B(v, w).
\end{aligned}$$

16. * Millainen polynomifunktio kuvaus $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q(v) = v \cdot v$ on?

Ratkaisu: Olkoon $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Nyt

$$Q(v) = v \cdot v = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2.$$

Neliömuoto Q antaa siis vektorin v Euklidisen normin neliön.