Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 5

Tähdellä merkityt laskuharjoitukset palautetaan kirjallisesti viimeistään ti 21.6. klo 13. Muut tehtävät käydään läpi laskuharjoituksissa tiistaina 21.6. klo 13–15.

Edellisissä harjoituksissa (tai niiden ratkaisuissa) oli hieman puhetta polynomeista, joiden muuttujan paikalle sijoitetaan matriisi. On hyvä huomata, että polynomien algebralliset ominaisuudet eivät riipu siitä, mitä muuttujan paikalle laitetaan. Esimerkiksi polynomien kertolasku on vaihdannainen, ja tästä seuraa, että jos A on neliömatriisi, ja f ja g ovat polynomeja, niin $f(A)g(A) = g(A)f(A)$. Tämä siis pätee, vaikka matriisien kertolasku ei yleisessä tapauksessa olekaan vaihdannaista.

Tehtävissä 1–7 avaruus V on K-kertoiminen vektoriavaruus, jonka dimensio on n, ja $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus.

1. * Oletetaan, että vektorijono $(v_1, \ldots, v_l)$ on aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta ja jono $(v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_m)$ puolestaan V:n kanta. Osoita, että jono $(Lw_1, \ldots, Lw_m)$ on aliavaruuden $\operatorname{Im} L$ kanta.

2. * Osoita *dimensiolause*:

$$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V.$$

3. * Olkoon $v \in V$. Oletetaan, että eräällä kokonaisluvulla k pätee $L^k v = 0$, ja lisäksi k on pienin positiivinen kokonaisluku, jolla yhtälö pätee. Osoita, että vektorijono

$$(v, Lv, L^2 v, \ldots, L^{k-1} v)$$

on vapaa.

4. Osoita, että jos $L^k = 0$ jollain k, niin $L^n = 0$. (Muista, että $n = \dim V$.)

   Vihje: Käytä edellistä tehtävää.

5. * Osoita, että avaruuden V aliavaruus on kuvauksen L yleistetty ominaisavaruus, jos ja vain jos se on muotoa $\operatorname{Ker}(L - \lambda I)^n$, missä $\lambda \in K$.

6. Osoita, että aliavaruudet $\mathrm{Ker}(L - \lambda I)^n$ ja $\mathrm{Im}(L - \lambda I)^n$ ovat vakaita kuvauksessa L.

   Vihje: Muista, että polynomit kommutoivat.

7. Oletetaan, että λ on L:n ominaisarvo. Osoita, että

   $$V = \mathrm{Ker}(L - \lambda I)^n \oplus \mathrm{Im}(L - \lambda I)^n.$$

   Vihje: Osoittaaksesi, että leikkaus on triviaali, valitse jokin leikkauksen alkion alkukuva w, ja osoita, että sille pätee $(L - \lambda I)^k w = 0$ jollain k. Käytä sitten tehtävää 4. Virittämiseen voit käyttää dimensiolausetta.

8. Olkoon V äärellisulotteinen kompleksikertoiminen vektoriavaruus, ja olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Osoita, että

   $$V = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k},$$

   missä $k \in \mathbb{N}$ ja kukin V_{λ_i} on ominaisarvoon λ_i liittyvä yleistetty ominaisavaruus.

   Vihje: Käytä induktiota avaruuden dimension suhteen sekä edellistä tehtävää.

9. Ratkaistuasi liniksen jatkokurssin kaikkien aikojen vaativimman tehtävän, kissasi kaatoi kahvikupin muistiinpanojesi päälle. Vain alla olevat rivit säilyivät lukukelpoisina. Täydennä muistiinpanot.

   Väite: $(\dots)$

   Todistus: Olkoot $v_i, \dots, v_m$ yleistettyjä ominaisvektoreja, jotka vastaavat eri ominaisarvoja $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Oletetaan, että

   $$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0.$$

   Osoitetaan, että $a_1 = 0$. Olkoon k pienin kokonaisluku, jolla $(\dots)$ Koska kaikilla i pätee $(A - \lambda_i I)^n v_i = 0$, missä $n =(\dots)$

   $$\begin{aligned} 0 &= (A - \lambda_1 I)^{k-1}(A - \lambda_2 I)^n \cdots (A - \lambda_m I)^n \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \\ &= (\dots) \end{aligned}$$

   Viimeisessä tulossa jokainen termi $(A - \lambda_i)^n$ voidaan kirjoittaa myös muodossa

   $$\Big((A - \lambda_1 I) + (\lambda_1 - \lambda_i)I\Big)^n = (A - \lambda_1 I)B_i + (\lambda_1 - \lambda_i)^n I,$$

   missä B_i $(\dots)$ Näin ollen

   $$0 = a_1(\lambda_1 - \lambda_2)\cdots(\lambda_1 - \lambda_m)(A - \lambda_1 I)^{k-1} v_1.$$

   Koska $(\dots)$ täytyy olla $a_1 = 0$. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että $a_i = 0$ kaikilla i, joten $(\dots)$

10. * Olkoon V äärellisulotteinen kompleksikertoiminen vektoriavaruus, ja olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Osoita, että avaruudella V on kanta

$$S = (v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1},\ v_{2,1}, \dots, v_{2,m_2},\ \cdots,\ v_{k,1}, \dots, v_{k,m_k}),$$

missä kukin osajono $(v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i})$ on yleistetyn ominaisavaruuden V_{λ_i} kanta. Kuvaile, miltä kuvauksen L matriisi näyttää kannassa S.

Vihje: Käytä kahta edellistä tehtävää.

Viime laskuharjoituksissa käsiteltiin multilineaarisia kuvauksia. Multilineaarista kuvausta kutsutaan *bilineaarikseksi*, jos lähtöjoukon karteesisessa tulossa on vain kaksi tekijää. Kuvaus $B\colon V \times V \to K$ on siis bilineaarinen, jos seuraavat ehdot pätevät kaikilla $v, w, u \in V$ ja $a \in K$:

$$\begin{aligned}
&B(v+w,u) = B(v,u) + B(w,u)\\
&B(v,w+u) = B(v,w) + B(v,u)\\
&B(av,w) = aB(v,w)\\
&B(v,aw) = aB(v,w).
\end{aligned}$$

Bilineaarisia kuvauksia kutsutaan usein *bilineaarisiksi muodoiksi*.

Muoto B on *symmetrinen*, jos $B(v,w) = B(w,v)$ kaikilla $v, w \in V$.

11. * Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulo $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $B(v,w) = v \cdot w$ on bilineaarinen muoto. Onko se symmetrinen?

Kuten kaikki muutkin tämän asti käsitellyt lineaarialgebran käsitteet, myös bilineaariset muodot voidaan esittää matriiseina. Oletetaan, että avaruus V on äärellisulotteinen ja sillä on kanta $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Olkoon $B\colon V \times V \to K$ bilineaarinen muoto. Nyt halutaan löytää sellainen matriisi $[B]_S$, jolla kertominen antaa saman tuloksen kuin kuvauksella B kuvaaminen. Lähtöarvot ovat vektoripareja, joten jollakin tapaa pitää pystyä kertomaan matriisilla kahta vektoria. Kerrotaan mariisilla $[B]_S$ toista vektoria oikealta puolelta ja toista vasemmalta. Matriisin on siis toteuttava ehto

$$([v]_S)^T [B]_S [w]_S = B(v,w).$$

Koska kantavektorien arvot määräävät bilineaarisen muodon arvot täysin, määräytyy muotoa vastaava matriisi kantavektorien arvojen perusteella. Matriisin kohtaan (i,j) tulee arvo $B(v_i, v_j)$. Tällöin kantavektorien arvot kuvautuvat oikein.

Vastaavasti jokainen neliömatriisi antaa bilineaarisen muodon.

12. * Tutkitaan $n \times n$-matriisia A ja $n \times 1$ matriisia $e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$, missä luku 1 on paikassa i. Miltä näyttää tulo $e_i^T A e_j$? Miten tämä perustelee sen, että bilineaarisen kuvauksen matriisi muodostettiin yllä kuvatulla tavalla?

13. Varmista, että pistetuloa vastaava matriisi luonnollisen kannan suhteen kirjoitettuna on ykkösmatriisi.

14. Keksi kaksi symmetristä bilineaarista muotoa avaruudelta $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ kuntaan $\mathbb{R}$. Voit vaikka ensin keksiä muotojen matriisit ja johtaa sitten niistä kuvauksen kaavan. Käytä mielikuvitustasi.

15. Määritä edellisessä tehtävässä keksimiesi kuvausten matriisit luonnollisen kannan sekä kannan $((1,1),(1,-1))$ suhteen.

Huomautus kurssin Algebra I käyneille: Seuraavassa tarkastelussa on oletettava, että kunnan K karakteristika ei ole kaksi. Toisin sanoen oletetaan, että $2 \neq 0$. Alla esitetty neliömuodon käsite voidaan kyllä määritellä myös karakteristikan ollessa kaksi, mutta silloin teoria muotoutuu hieman erilaiseksi.

Kuvausta $Q\colon V \to K$ kutsutaan *neliömuodoksi*, jos $Q(v) = B(v,v)$ jollakin bilineaarisella muodolla $B\colon V \times V \to K$.

Voidaan osoittaa, että neliömuoto $Q\colon K^n \mapsto K$ on aina muotoa

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j} a_{i,j} x_i x_j$$

joillakin vakioilla $a_{i,j} \in K$. Kyseessä on siis polynomifunktio, jossa jokaisen termin aste on kaksi.

16. * Millainen polynomifunktio kuvaus $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q(v) = v \cdot v$ on?

17. Määritä keksimiäsi symmetrisiä bilineaarisia muotoja vastaavat polynomifunktiot.

18. * Mitä mieltä olit tämän viikon tehtävistä? Mikä mielestäsi toimi tällä kurssilla? Mitä olisit toivonut tehtävän toisin?