Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 4, ratkaisuehdotus

Jos $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus ja $v \in V$, on merkinnästä $L(v)$ tapana jättää sulut pois. Voidaan siis kirjoittaa Lv.

2. Totta vai tarua?

> Oletetaan, että V on äärellisulotteinen vektoriavaruus. Jos jonkin avaruuden V kannan kuva lineaarikuvauksessa $L\colon V \to V$ on kanta, kuvaus on bijektio.

Ratkaisu: Väite on totta. Oletetaan, että V on K-kertoimien vektoriavaruus, jolla on kanta $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus ja oletetaan, että myöskin $(Lv_1, Lv_2, \ldots, Lv_n)$ on avaruuden V kanta.

Osoitetaan ensin, että kuvaus on surjektio. Olkoon $w \in V$. Tällöin

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i L v_i \quad \text{joillakin } a_i \in K$$

Huomataan, että nyt $w = L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right)$, joten $w \in \operatorname{Im} L$. Siten kuvaus on surjektio.

Osoitetaan vielä injektiivisyys. Olkoon $v \in \operatorname{Ker} L$. On näytettävä, että $v = 0$. Tiedetään, että $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ joillakin $a_i \in K$. Nyt

$$0 = L(v) = L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i L v_i.$$

Koska $(Lv_1, Lv_2, \ldots, Lv_n)$ on kantana vapaa, seuraa tästä, että $a_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Siten $v = 0$ ja kuvaus on injektio.

4. Oletetaan, että $M\colon V^n \to K$ on multilineaarinen kuvaus. Osoita, että

$$M(kv_1, \ldots, kv_n) = k^n M(v_1, \ldots, v_n)$$

kaikilla $v_1, \ldots, v_n \in V$ ja $k \in K$.

Ratkaisu: Olkoot $v_1, \ldots, v_n \in V$ ja $k \in K$. Multilineaarisuuden nojalla

$$M(v_1, \ldots, kv_i, \ldots, v_n) = kM(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

millä tahansa $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Käyttämällä tätä sääntöä erikseen jokaiseen argumenttii saadaan

$$M(kv_1, \ldots, kv_n) = k^n M(v_1, \ldots, v_n).$$

5. Oletetaan, että $M\colon V^n \to K$ on alternoiva multilineaarinen kuvaus. Osoita, että
$$M(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j \dots, v_n) = -M(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i \dots, v_n)$$
kaikilla $v_1, \dots, v_n \in V$.

Ratkaisu: Oletetaan, että $v_1, \dots, v_n \in V$. Alternoivuudesta seuraa, että
$$M(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j \dots, v_n) = 0.$$
Toisaalta multilineaarisuuden perusteella
$$\begin{aligned}
&M(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j \dots, v_n) \\
&= M(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i + v_j \dots, v_n) + M(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i + v_j \dots, v_n) \\
&= M(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i \dots, v_n) + M(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j \dots, v_n) \\
&+ M(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i \dots, v_n) + M(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j \dots, v_n) \\
&= M(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j \dots, v_n) + M(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i \dots, v_n).
\end{aligned}$$
Viimeinen yhtäsuuruus seuraa jälleen alternoivuudesta.

Koska yllä todettiin, että tämä lauseke on itse asiassa nolla, tiedetään, että
$$M(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j \dots, v_n) = -M(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i \dots, v_n).$$

6. Oletetaan, että $M\colon V^n \to K$ on alternoiva multilineaarinen kuvaus. Osoita, että
$$M(v_1, \dots, v_i + kv_j \dots, v_j, \dots, v_n) = M(v_1, \dots, v_i \dots, v_j, \dots, v_n)$$
kaikilla $v_1, \dots, v_n \in V$.

Ratkaisu: Oletetaan, että $v_1, \dots, v_n \in V$. Huomataan, että
$$\begin{aligned}
&M(v_1, \dots, v_i + kv_j \dots, v_j, \dots, v_n) \\
&= M(v_1, \dots, v_i \dots, v_j, \dots, v_n) + M(v_1, \dots, kv_j \dots, v_j, \dots, v_n) \\
&= M(v_1, \dots, v_i \dots, v_j, \dots, v_n) + kM(v_1, \dots, v_j \dots, v_j, \dots, v_n) \\
&= M(v_1, \dots, v_i \dots, v_j, \dots, v_n) + 0 \\
&= M(v_1, \dots, v_i \dots, v_j, \dots, v_n).
\end{aligned}$$
Siten väite on todistettu.

7. Oletetaan, että $M\colon V^n \to K$ on alternoiva multilineaarinen kuvaus. Olkoot vektorit $v_1, \dots, v_n \in V$ lineaarisesti riippuvia. Osoita, että
$$M(v_1, \dots, v_n) = 0.$$

Ratkaisu: Koska vektorit $v_1, \ldots, v_n \in V$ ovat lineaarisesti riippuvia, jokin vektoreista on mahdollista ilmaista toisten lineaarikombinaationa. Voidaan olettaa, että kyseinen vektori on v_1. (Jos näin ei ole, voidaan vektorit nimetä uudelleen.) Nyt siis

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} a_i v_i$$

joillakin $a_i \in K$. Huomataan, että

$$M(v_1, \ldots, v_n) = M\left(\sum_{i=2}^{n} a_i v_i, v_2 \ldots, v_n\right) = \sum_{i=2}^{n} a_i M(v_i, v_2 \ldots, v_n).$$

Jokaisessa summattavassa argumenttina olevista vektoreista vähintään kaksi on aina samoja. Alternoivuudesta seuraa tällöin, että $M(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

8. Tutki seuraavissa tapauksissa, mitä tapahtuu, kun matriisilla A kerrotaan jotakin toista matriisia vasemmalta puolelta. Yleistä saamasi tulokset.

   a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   c)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu: Tässä tehtävässä tutkittavat matriisit ovat niin kutsuttuja alkeismatriiseja. Kun niillä kertoo toista matriisia vasemmalta puolelta, saa aikaan jonkin alkeisrivitoimituksista.

Tutkitaan K-kertoimista matriisia

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}.$$

a) Huomataan, että

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ kb_{41} & kb_{42} & kb_{43} & kb_{44} & kb_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}.$$

Matriisi A siis kertoo neljännen rivin skalaarilla k.

Yleinen tapaus: Olkoon A matriisi, joka saadaan ykkösmatriisista kertomalla riviä i skalaarilla k. Tällöin matriisilla A kertominen saa aikaa saman tuloksen kuin alkeisrivitoimitus, jossa rivi i kerrotaan skalaarilla k.

b) Tässä tapauksessa

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}.$$

Huomataan,että matriisi A vaihtaa toisen ja viidennen rivin paikat.

Yleinen tapaus: Olkoon A matriisi, joka saadaan ykkösmatriisista vaihtamalla rivien i ja i' paikat. Tällöin matriisilla A kertominen saa aikaa saman tuloksen kuin alkeisrivitoimitus, jossa vaihdetaan rivien i ja i' paikat.

c) Viimeisessä tapauksessa

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} + kb_{21} & b_{42} + kb_{22} & b_{43} + kb_{23} & b_{44} + kb_{24} & b_{45} + kb_{25} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}.$$

Matriisilla A kerrottaessa neljänteen riviin summataan toinen rivi skalaarilla k kerrottuna.

Yleinen tapaus: Olkoon A matriisi, joka saadaan ykkösmatriisista lisäämällä alkio k kohtaan (i, j). Tällöin matriisilla A kertominen saa aikaa saman tuloksen kuin alkeisrivitoimitus, jossa riviin i lisätään rivi j skalaarilla k kerrottuna.

15. Tee uudestaan harjoituksen 2 alkuperäiset tehtävät 26 ja 27. (Tehtävissä käsiteltiin yläkolmiomatriisin ominaisarvoja.) Käytä nyt hyväksesi edellistä tehtävää.

Ratkaisu. Tehtävässä 26 piti löytää yläkolmiomatriisille

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & -16 & \sqrt{5} \\ 0 & -4 & 1000 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

neljä eri ominaisarvoa. Harjoituksen 3 tehtävän 10 perusteella useampia ominaisarvoja ei voikaan löytää. Tehtävä oli ratkaistavissa mutta turhan työläs ilman näissä harjoituksissa kehitettyä koneistoa.

Tehtävän 14 perusteella λ on matriisin A ominaisarvo täsmälleen silloin, kun $\det(A - \lambda I) = 0$. Lasketaan siis matriisin $A - \lambda I$ determinantti. Koska matriisi on yläkolmiomuotoinen, kehityskaava antaa determinantiksi lävistäjäalkioiden tulon (vrt. edellisen harjoituksen tehtävään 18):

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda - i & 0 & -16 & \sqrt{5} \\ 0 & \lambda + 4 & 1000 & 1/2 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & -i \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - i)(\lambda + 4)(\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

Ominaisarvoiksi saadaan näin ollen luvut i, -4, 2 ja -1.

Tehtävässä 27 piti yleistää saatua tulosta. Helposti nähdään, että muista alkioista riippumatta yläkolmiomatriisin ominaisarvoja ovat täsmälleen lävistäjälle osuvat alkiot. Jos nämä ovat kaikki erejä, ominaisarvoja on yhtä monta kuin on avaruuden dimensio, mikä onkin maksimimäärä.

16. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $L(a, b, c) = (b, 0, c)$. Etsi kuvauksen L ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisavaruudet. (Kannattanee ensin kirjoittaa kuvauksen matriisi luonnollisen kannan suhteen.)

Ratkaisu. Luonnollisessa kannassa kuvauksen matriisi saadaan asettamalla sarakkeiksi kantavektorien $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ ja $e_3 = (0, 0, 1)$ kuvat:

$$[L]_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Käytetään tehtävää 14. Sen mukaan on ominaisarvojen löytämiseksi ratkaistava yhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$. Determinantti saadaan yläkolmiomatriisin determinanttina kertomalla diagonaalialkiot keskenään (ks. edellinen tehtävä):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) = 0.$$

Ominaisarvoja ovat täsmälleen luvut $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 0$.

Ominaisarvoa $\lambda_1 = 1$ vastaava ominaisavaruus saadaan määrittämällä nolla-avaruus $\mathrm{Null}([L]_E - \lambda_1 I)$ (ks. edellisen harjoituksen tehtävä 8), joka on sama avaruus kuin $\mathrm{Ker}(L - \lambda_1 I)$. Ratkaistaan siis yhtälö $([L]_E - I)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} v_2 - v_1 & = & 0 \\ -v_2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} v_1 & = & 0 \\ v_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Koordinaatti v_3 voidaan valita mielivaltaisesti, joten ominaisavaruudeksi saadaan suora $V_1 = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{C}\}$.

Toista ominaisarvoa $\lambda_2 = 0$ vastaava ominaisavaruus saadaan puolestaan määrittämällä $\mathrm{Null}([L]_E)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} v_2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ v_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Myös tämä ominaisavaruus on yksiulotteinen: $V_0 = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{C}\}$.

Huomaa, että geometrisesti tulos merkitsee sitä, että lineaarikuvaus kiinnittää suoran $t(0, 0, 1)$ (z-akseli, ominaisarvo 1), ja nutistaa suoran $t(1, 0, 0)$ pisteeksi (x-akseli, ominaisarvo 0).

17. Jatkoa edelliseen tehtävään. Löydätkö avaruudelle $\mathbb{C}^3$ kannan, joka koostuu ominaisvektoreista?

Ratkaisu. Kaikki kuvauksen L ominaisvektorit olivat joko vektorin $(0, 0, 1)$ tai vektorin $(1, 0, 0)$ suuntaisia, joten ne virittävät yhdessä kaksiulotteisen tason $\{(a, 0, c) \mid a, c \in \mathbb{C}^3\}$. Niistä ei siis voi muodostaa kantaa avaruudelle, jonka dimensio on 3.

18. Jatkoa edelliseen tehtävään. Osoita, että kaikki joukon $\{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$ vektorit ovat kuvauksen L yleistettyjä ominaisvektoreita.

Ratkaisu. Yleistetyt ominaisvektorit liittyvät jompaan kumpaan ominaisarvoon. Kokeilemalla huomataan, että

$$(L - 0I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siispä

$$(L - 0I)^2(a, b, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kaikilla $a, b \in \mathbb{C}$. Täten väitetyt vektorit tosiaan ovat yleistettyjä ominaisvektoreita, jotka lisäksi liittyvät ominaisarvoon 0.

Huomaa, että ominaisarvoon 0 liittyvät tavalliset ominaisvektorit $(a, 0, 0)$ ovat myös yleistettyjä ominaisvektoreita, niin kuin pitääkin.

19. Jatkoa edelliseen tehtävään. Löydätkö avaruudelle $\mathbb{C}^3$ kannan, joka koostuu kuvauksen L yleistetyistä ominaisvektoreista?

Ratkaisu. Edellisen tehtävän nojalla vektorit $(1, 0, 0)$ ja $(0, 1, 0)$ ovat (ominaisarvoon 0 liittyviä) yleistettyjä ominaisvektoreita. Lisäksi aiemmin näytettiin, että $(0, 0, 1)$ on (ominaisarvoon 1 liittyvä) ominaisvektori, siis myös yleistetty ominaisvektori. Nämä muodostavat avaruuden $\mathbb{C}^3$ kannan.