Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 3
Ratkaisuehdotus suullisiin tehtäviin

4. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.

a) Sama vektori voidaan kirjoittaa usealla eri tavalla koordinaattivektorina.

b) Lineaarikuvauksessa kannan kuva on kanta.

c) Lineaarikuvauksen ytimessä on aina vain yksi alkio.

d) Jos kantavektorien arvot tiedetään lineaarikuvauksessa, tiedetään kaikkien vektorien arvot.

e) Jos $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus, niin $\operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Im} L = \{0\}$.

Ratkaisu. **a)** Totta. Vektorin koordinaattiesitys riippuu kannasta. Esimerkiksi vektori $v = (1, 1)$ on luonnollisen kannan suhteen kirjoitettuna $[v]_E = [1\ 1]^T$ ja kannan $S = ((1, 1), (1, -1))$ suhteen $[v]_S = [1\ 0]^T$.

b) Ei välttämättä. Esimerkkinä nollakuvaus $L_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolle $L_0 v = 0$ kaikilla $v \in \mathbb{R}^2$. Luonnollisen kannan kuva on $L_0\{(1, 0), (0, 1)\} = \{0\}$, joka ei viritä avaruutta $\mathbb{R}$.

c) Ei välttämättä. Edellisen kohdan nollakuvaus kuvaa koko avaruuden nollavektorille, joten $\operatorname{Ker} L = \mathbb{R}^2$.

d) Kyllä. Olkoon $L : V \to W$ lineaarikuvaus ja S avaruuden V kanta. Jos $v \in V$, niin löytyy jotkin kannan alkiot $v_1, \ldots, v_n \in S$, joille pätee $v = \sum_{i=0}^n a_i v_i$. Nyt

$$Lv = L \sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \sum_{i=0}^{n} a_i L v_i.$$

Jos kanta-alkioiden kuvat Lv_i tunnetaan, myös Lv on tunettu.

e) Ei välttämättä. Mietitäänpä, mitä ehdosta $\operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Im} L = \{0\}$ seuraa. Jos $v \in \operatorname{Im} L$, niin $v = Lw$ jollain $w \in V$. Jos samalla pätee $v \in \operatorname{Ker} L$, niin $0 = Lv = L^2 w$. Vastaesimerkin löytämiseksi on siis löydettävä lineaarikuvaus L ja vektori w, joille pätee $Lw \neq 0$ mutta $L^2 w = 0$.

Tällainen kuvaus löytyy helposti. Tarkastellaan matriisin $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ määrittämää lineaarikuvausta $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (luonnollisen kannan suhteen). Koska $L^2 = 0$, tarvitsee vain löytää jokin vektori, joka ei kuvaudu nollaksi. Tällainen on esimerkiksi $w = (0, 1)$. Nyt $L(0, 1) = (1, 0) \in \operatorname{Im} L$ mutta samalla $L(1, 0) = (0, 0)$, joten $(1, 0) \in \operatorname{Ker} L$.

Jos haluaa ajatella esimerkin kuvausta geometrisesti, se vastaa tason kiertoa 90 astetta myötäpäivään, jonka jälkeen vielä projisoidaan x-akselille. Tällöin kantavektori $(0, 1)$ kiertyy x-akselille kohtaan $(1, 0)$ ja pysyy projisoinnissa paikallaan. Toisaalta vektori $(1, 0)$ kiertyy y-akselille, josta se projisoituu nollaksi.

5. Piirrä käsitekartta lineaarikuvauksiin liittyvistä käsitteistä ja tuloksista.

   Ratkaisu: Käsitekartta löytyy ratkaisuehdotuksen viimeiseltä sivulta.

6. Päättele seuraavien lineaarikuvausten ominaisvektorit.

   a) tason $\mathbb{R}^2$ kierto kulman θ ympäri
   b) avaruuden $\mathbb{R}^3$ kierto vektorin v suuntaisen akselin ympäri
   c) kohtisuora projektio tasossa vektorin $v \in \mathbb{R}^2$ suuntaiselle suoralle
   d) polynomin derivointi (polynomiavaruuden kuvaus)
   e) derivoituvan reaalifunktion derivointi (funktioavaruuden $C^1(\mathbb{R})$ kuvaus)

Ratkaisu. Tässä tehtävässä ei ollut tarkoitus antaa tarkkoja perusteluja eikä välttämättä edes löytää kaikkia ominaisvektoreita. Pääasia oli yrittää sisäistää ominaisvektorin käsite erilaisten esimerkkien avulla. Jos ratkaisua on vaikea seurata, kannattaa piirtää kuvia.

a) Tarkastellaan mitä tahansa nollasta poikkeavaa vektoria v. Kun tasoa kierretään kulman θ verran (sanotaan vaikka vastapäivään), v kuvautuu joksikin vektoriksi v'. Jotta v olisi ominaisvektori, täytyy päteä $v' = \lambda v$ jollain skalaarilla $\lambda \in \mathbb{R}$. Kiertäminen ei kuitenkaan esimerkiksi muuta vektorin pituutta, joten λ:n täytyy olla 1 tai -1. Ensimmäisessä tapauksessa täytyy olla $\theta = 2n\pi$ jollain $n \in \mathbb{Z}$, jolloin kierto on identtinen kuvaus, ja kaikki nollasta poikkeavat vektorit ovat ominaisvektoreita (ominaisarvolla 1). Toisessa tapauksessa taas täytyy olla $\theta = (2n + 1)\pi$, jolloin $v = -v$ kaikilla $v \neq 0$, joten tällaiset v:t ovat ominaisvektoreita (ominaisarvo -1).

b) Nollasta poikkeavat vektorit voidaan jakaa kolmeen ryhmään: (1) vektorin v (eli kiertoakselin) suuntaiset vektorit, jotka pysyvät kierrossa paikallaan ja ovat siksi ominaisvektoreita, (2) kiertoakselia vastaan kohtisuorassa tasossa olevat vektorit, joiden tilanne palautuu a)-kohtaan, ja (3) loput vektorit, jotka eivät kuvaudu vastavektorikseen, joten ne voivat olla ominaisvektoreita ainoastaan jos kiertokulma on täyskulman monikerta ja kuvaus tällöin identtinen kuvaus.

c) Tässä kuvauksessa jokainen tason vektori w kuvautuu vektorin v suuntaiselle suoralle, joten kuvavektori on muotoa tv jollain $t \in \mathbb{R}$. Jotta $w \notin \{0\}$

olisi ominaisvektori, eli jollain $\lambda \in \mathbb{R}$ pätisi $tv = \lambda w$, täytyy joko päteä $t = \lambda = 0$, tai sitten v:n ja w:n täytyy olla yhdensuuntaisia. Jälkimmäinen toteutuu kaikilla v:n suuntaisen suoran vektoreilla (ominaisarvo 1). Edellinen toteutuu, jos $t = 0$ eli w projisoituu nollavektoriksi. Tämä tapahtuu täsmälleen v:tä vastaan kohtisuorilla vektoreilla (ominaisarvo 0).

d) Derivoitaessa reaalikertoimista polynomia sen aste vähenee yhdellä, ellei kyseessä ole vakiopolynomi. Vakiosta poikkeavan polynomin derivaatta ei siis voi olla polynomin skalaarimonikerta. Vakiot sen sijaan derivoituvat nollaksi, joten ne ovat ominaisvektoreita ominaisarvolla 0 (paitsi tietysti nolla itse, koska nollavektoria ei koskaan lasketa ominaisvektoriksi).

e) Tehtävä voidaan pukea sanoiksi: ”mitkä reaalifunktiot muuttuvat derivoitaessa itsensä monikerroiksi?”. Edellisen kohdan perusteella ainakin vakiofunktiot ovat tällaisia (ominaisarvo 0). Lisäksi koulusta muistetaan, että $D\,e^x = e^x$, joten eksponenttifunktio on ominaisvektori (ominaisarvo 1). Muutkin ominaisvektorit saadaan eksponenttifunktion avulla, kuten seuraavassa nähdään.

Oletetaan, että f on jatkuvasti derivoituva reaalifunktio. Oletetaan lisäksi, että kaikilla x pätee $f(x) \neq 0$. Jotta f olisi ominaisvektori, täytyy päteä $f' = \lambda f$. Koska $f(x) \neq 0$, voidaan jakaa puolittain: $f'/f = \lambda$. Tästä edelleen puolittain integroimalla saadaan $\ln|f(x)| = \lambda x + C$. Lopulta $f(x) = \pm e^C e^{\lambda x}$, missä etumerkki määräytyy siten, että f:stä tulee jatkuva.

Differentiaaliyhtälöiden teoriasta seuraa, että koska nollafunktio toteuttaa yhtälön $f' = \lambda f$, mikään muu ratkaisu ei voi koskaan saada arvoa nolla. Tämä oikeuttaa alun oletuksen $f(x) \neq 0$. Lisäksi tästä seuraa, että lopullisen ratkaisun etumerkki pysyy samana kaikilla x, joten se voidaan sulauttaa yhdeksi vakioksi luvun e^C kanssa. Näin ollen kaikki ominaisvektorit ovat muotoa $f(x) = De^{\lambda x}$. Jokaista ominaisarvoa λ vastaa siis ominaisavaruus, joka on vektorin $e^{\lambda x}$ suuntainen suora. Vakiofunktiot saadaan ominaisarvolla $\lambda = 0$ ja tavallinen eksponenttifunktio ominaisarvolla $\lambda = 1$.

Seuraavien tehtävien tarkoitus oli osoittaa, että kompleksimatriisilla on aina vähintään yksi ominaisvektori. Tehtävä 14 oli hiukan vaikeampi ratkaista täsmällisesti, mutta riittää, jos tehtävän idean ymmärtää. Alla olevassa ratkaisussa on pyritty mahdollisimman suureen täsmällisyyteen.

13. Olkoon A jokin $\mathbb{C}$-kertoiminen $n \times n$-matriisi, ja $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Osoita, että löytyy kertoimet $a_0, \ldots, a_n$, jotka eivät ole kaikki nollia ja joille pätee

$$a_0 v + a_1 Av + a_2 A^2 v + \cdots + a_n A^n v = 0. \tag{1}$$

Vihje: Tutki vektorijonoa $(v, Av, A^2v, \ldots, A^n v)$ ja muista, että avaruuden dimensio on n.

Ratkaisu. Koska avaruuden $\mathbb{C}^n$ dimensio on n, pituudeltaan yhtä pidempi vektorijono $(v, Av, A^2v, \ldots, A^nv)$ ei voi olla vapaa. Löytyy siis kertoimet $a_0, \ldots, a_n$, jotka eivät ole kaikki nollia ja joille pätee yhtälö (1).

14. Jatkoa edelliseen tehtävään: Osoita, että löytyy kompleksiluvut $a \neq 0$ sekä $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, joille pätee

$$a(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_m I)v = 0.$$

Päättele, että matriisilla A on ainakin yksi (kompleksinen) ominaisarvo.

Ratkaisu. Etsitty muoto muistuttaa polynomien tekijöihinjaosta. Lähdetään siis tutkimaan kompleksikertoimista polynomia

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

missä kaikki kertoimet eivät ole nollia. Kompleksilukujen kunta on algebrallisesti suljettu, mikä tarkoittaa sitä, että jokaisella vakiosta poikkeavalla kompleksipolynomilla on kompleksijuuri (algebran peruslause). Tästä seuraa, että jokainen kompleksipolynomi f jakautuu tuloksi $f(z) = (z - \lambda)g(z)$, missä λ on f:n juuri ja g on yhtä astetta pienempi polynomi. Induktiolla voidaan edelleen päätellä, että f jakautuu itse asiassa ensimmäisen asteen tekijöihin, joita on yhtä monta kappaletta kuin on polynomin aste. Voidaan siis päätellä, että

$$f(z) = a(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_m), \tag{2}$$

missä m on f:n aste (voi olla pienempi kuin n).

Huomaa, että polynomin tekijöihinjaossa ei ole mitään väliä sillä, mitä muuttujan z paikalla on. Kyse on vain algebrallisesta ”yhteisten tekijöiden etsimisestä”, tai toiseen suuntaan ”sulkujen auki kertomisesta”. Voimme siis todeta, että sijoittamalla yhtälöön (2) muuttujan z paikalle matriisin A (sekä skalaarien λ_i paikalle skalaarimatriisin $\lambda_i I$) ja kertomalla sulut auki saadaan yhtälö

$$a(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_m I) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n.$$

Edelleen, jos jollain vektorilla v pätee

$$a_0 v + a_1 Av + a_2 A^2 v + \cdots + a_n A^n v = (a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n)v = 0,$$

niin myös yhtälö

$$a(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_m I)v = 0 \tag{3}$$

pätee. Lisäksi $a \neq 0$, koska muuten f on nollapolynomi, mikä tarkoittaa vastaavasti sitä, että kaikki kertoimet $a_0, \ldots, a_n$ olisivat nollia.

Yllä olevan todistuksen sekä edellisen tehtävän perusteella tiedämme, että yhtälö (3) pätee jollain $m \leq n$ ja jollain (itse asiassa kaikilla) $v \neq 0$. Lähtemällä liikkeelle tulon loppupäästä voidaan nyt löytää haluttu ominaisvektori: Jos $(A - \lambda_m I)v = 0$, niin $v \neq 0$ kuuluu matriisin $A - \lambda_m I$ nolla-avaruuteen eli on matriisin A ominaisvektori ominaisarvolla λ_m. Ellei, tarkastellaan vektoria $w_1 = (A - \lambda_m I)v \neq 0$. Jos $(A - \lambda_{m-1} I)w_1 = 0$, niin w_1 on A:n ominaisvektori ominaisarvolla λ_{m-1}. Ellei, siirrytään tutkimaan vektoria $w_2 = (A - \lambda_{m-1} I)w_1$, jne.

Hieman täsmällisemmin, merkitään tulon loppupäätä

$$w_i = (A - \lambda_{m-i+1} I) \cdots (A - \lambda_m I)v.$$

Ensinnäkin huomataan, että koska $a \neq 0$, täytyy päteä $w_m = 0$. Olkoon nyt j pienin sellainen indeksi i, jolla $w_i = 0$. Nähdään, että $j > 0$, koska $w_0 = v \neq 0$. Tällöin pätee $w_{j-1} \neq 0$ ja $w_j = (A - \lambda_{m-j+1} I)w_{j-1} = 0$, joten w_{j-1} on ominaisvektori ominaisarvolla λ_{m-j+1}.

15. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 16 \\ 1/3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -1 & 16 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

determinantti.

Ratkaisu. Matriisissa on kaksi samaa riviä (ensimmäinen ja kolmas), joten determinantti on 0.

16. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 16 \\ 1/3 & 3 & 0 & 0 \\ 12 & 18 & -2 & 32 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

determinantti.

Ratkaisu. Merkitään matriisia kirjaimella A. Helpotetaan tehtävää lisäämällä ensimmäinen rivi kolmanteen -2:lla kerrottuna. Tämä ei muuta determinanttia mitenkään. Tuloksena saadaan

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 16 \\ 1/3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Nyt voidaan käyttää kehityskaavaa viimeisen sarakkeen suhteen. Saadaan

$$\det A = -16 \cdot \det A_{14} + 0 \cdot \det A_{24} - 0 \cdot \det A_{34} + 1 \cdot \det A_{44}.$$

Tarvittavat osadeterminantit ovat

$$\det A_{14} = \begin{vmatrix} 1/3 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1/3 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -3(2-12) = 30,$$

ja

$$\det A_{44} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 1/3 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1/3 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -1(2-12) = 10.$$

Täten

$$\det A = -16 \cdot 30 + 1 \cdot 10 = -470.$$

17. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 & 16 \\ 1/3 & 0 & 3 & 0 \\ 12 & -2 & 18 & 32 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

determinantti.

Ratkaisu. Kyseessä on lähes sama matriisi kuin edellisessä tehtävässä: vain sarakkeet 2 ja 3 on vaihdettu keskenään. Tällainen vaihto muuttaa matriisin etumerkin vastakkaiseksi, joten determinantti on 470.

18. Määritä matriisin

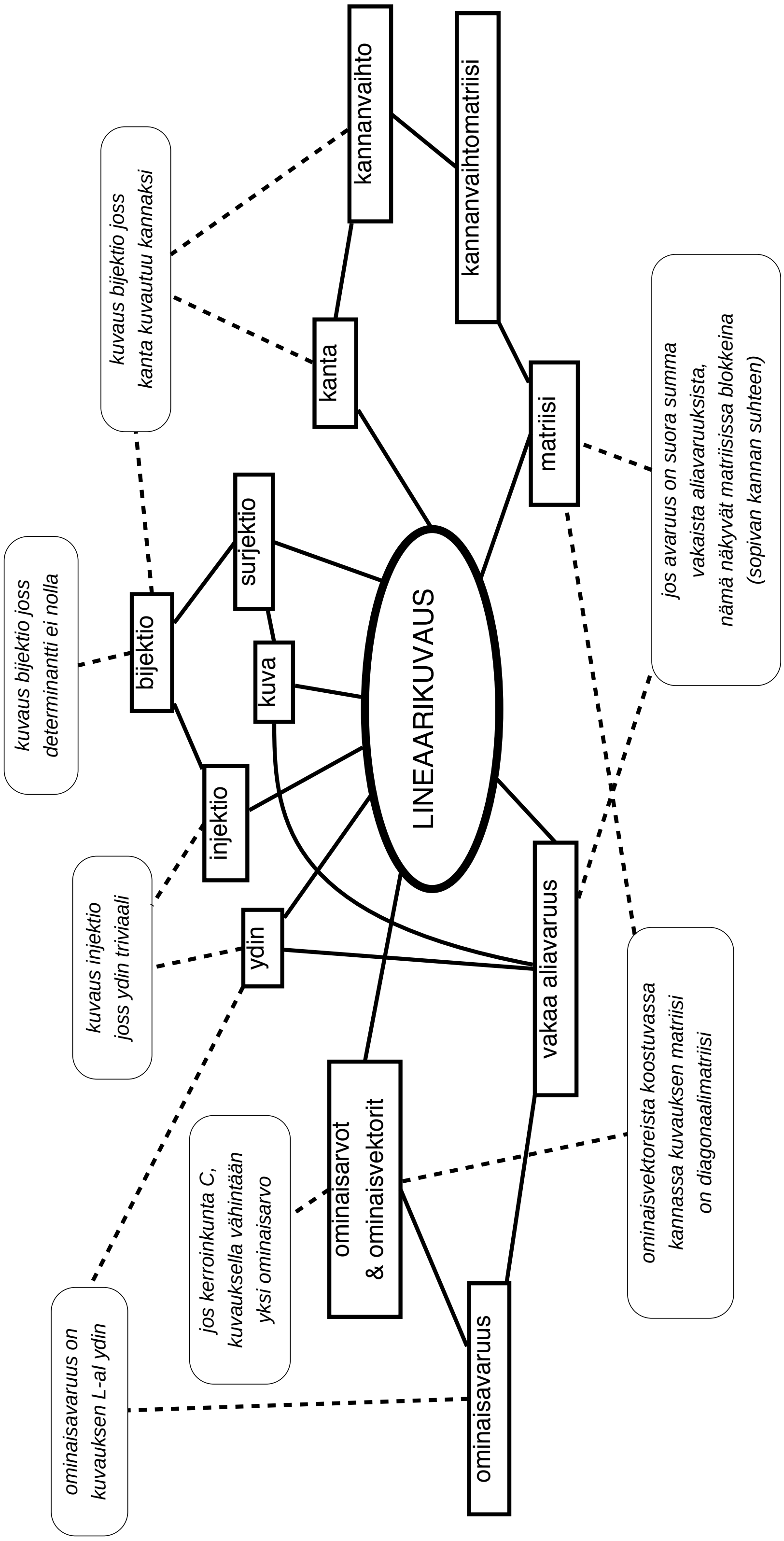
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 & 16 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

determinantti. Miten saamasi tulos yleistyy?

Ratkaisu. Käyttämällä kehityskaavaa toistuvasti ensimmäisen sarakkeen suhteen todetaan, että

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 & 16 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 32 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot (-1) = -20.$$

Yleisesti ottaen voidaan päätellä (tai todistaa induktiolla), että yläkolmiomatriisin (yhtä hyvin alakolmiomatriisin) determinantti on lävistäjäalkioiden summa. Tämä on yksi syy pyrkiä muuntamaan matriisi ylä- tai alakolmiomuotoon.


LINEAARIKUVAUS
kannanvaihto
kannanvaihtomatriisi
kanta
matriisi
surjektio
bijektio
kuva
injektio
ydin
vakaa aliavaruus
ominaisarvot
& ominaisvektorit
ominaisavaruus
kuvaus bijektio joss
kanta kuvautuu kannaksi
kuvaus bijektio joss
determinantti ei nolla
kuvaus injektio
joss ydin triviaali
jos kerroinkunta C,
kuvauksella vähintään
yksi ominaisarvo
ominaisavaruus on
kuvauksen L-al ydin
jos avaruus on suora summa
vakaista aliavaruuksista,
nämä näkyvät matriisissa blokkeina
(sopivan kannan suhteen)
ominaisvektoreista koostuvassa
kannassa kuvauksen matriisi
on diagonaalimatriisi