Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 3
Ratkaisuehdotus kirjallisiin tehtäviin

1*. Keksi lineaarikuvaus avaruudesta $\mathbb{R}^3$ avaruuteen $\mathbb{R}^4$.

Ratkaisu: Esimerkiksi kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$L(a,b) = (a, b, a+b)$$

on lineaarinen: kaikilla $a, a', b, b', r \in \mathbb{R}$ pätee

1. $L(a+a', b+b') = (a+a', b+b', a+a'+b+b') = (a,b,a+b)+(a',b',a'+b') = L(a,b) + L(a',b')$,
2. $L(ra, rb) = (ra, rb, ra+rb) = r(a,b,a+b) = rL(a,b)$.

Muita esimerkkejä voisi olla vaikkapa $(a,b) \mapsto (2a+b, a, a-3b)$, $(a,b) \mapsto (a,b,0)$, $(a,b) \mapsto (0,0,0)$ jne.

Helppo tapa lineaarikuvauksen keksimiseksi on kirjoittaa sitä vastaava matriisi. Mikä tahansa matriisi nimittäin määrittää lineaarikuvauksen. Valitaan vaikkapa matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Päätetään, että se on kuvauksemme matriisi luonnollisen kannan suhteen. Nyt vektorin (a,b,c) kuva on

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a - b + 7c \\ 2a + 7c \\ 4a + b - 3c \end{bmatrix}.$$

Kyseessä on siis kuvaus $(a,b,c) \mapsto (4a-b+7c, 2a+7c, 4a+b-3c)$. Kuvaus on automaattisesti lineaarinen.

2*. Mitkä ovat keksimäsi kuvauksen ydin ja kuva?

Ratkaisu: Määritetään yllä valitun kuvauksen L ydin. Kysymys on siitä, mitkä vektorit kuvautuvat nollaksi, ts. millä $v = (a,b)$ pätee $(a,b,a+b) = L(v) = (0,0,0)$. Vertaamalla vasenta ja oikeaa puolta keskenään nähdään suoraan, että on oltava $a = b = 0$; näin ollen ydin koostuu ainoastaan alkiosta $0 = (0,0)$ ts. $\operatorname{Ker} L = \{0\}$.

Aiempien tehtävien parissa on havaittu, että lineaarikuvauksen tapauksessa lähtöavaruuden kantavektoreiden kuvat virittävät aina kuva-avaruuden (mutta ei välttämättä koko maalijoukkoa!). Käyttämällä esimerkiksi luonnollista kantaa, saadaan

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{span}(L(e_1), L(e_2)) = \operatorname{span}((1,0,1),(0,1,1)).$$

(Kyseessä on siis eräs avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso.)

3*. Oletetaan, että lineaarikuvauksen $L\colon V \to W$ ydin on $\operatorname{Ker} L = 0$. Osoita, että L on injektio. Onko tehtävässä 1 keksimäsi kuvaus injektio?

Ratkaisu: Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen ja $\operatorname{Ker} L = \{0\}$. Jos $L(v) = L(w)$, on $L(v-w) = L(v) - L(w) = 0$, eli $v - w \in \operatorname{Ker} L$. Mutta silloin $v - w = 0$ eli $v = w$ ja siten L on injektio.

Koska tehtävässä 1 valitulle kuvaukselle L määritettiin tehtävässä 2 ydin $\operatorname{Ker} L = \{0\}$, on tehtävän kuvaus L injektiivinen.

7*. Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta S. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus ja $[L]_S$ sitä esittävä matriisi. Olkoon vektori v sellainen, että $[L]_S[v]_S = \lambda[v]_S$ jollakin $\lambda \in K$. Oletetaan, että myös T on avaruuden V kanta. Osoita, että $[L]_T[v]_T = \lambda[v]_T$. Mitä tulit todistaneeksi?

Ratkaisu: Olkoot V vektoriavaruus, S ja T sen kantoja ja A kannanvaihtomatriisi kannasta S kantaan T. Olkoon vielä $v \in V$ sellainen, että $[L]_S[v]_S = \lambda[v]_S$ eräällä $\lambda \in K$. Nyt $[L]_T = A[L]_S A^{-1}$ ja

$$[L]_T[v]_T = A[L]_S A^{-1}[v]_T = A[L]_S[v]_S = A\lambda[v]_S = \lambda A[v]_S = \lambda[v]_T,$$

eli erityisesti $[L]_T[v]_T = \lambda[v]_T$.

Tuloksen mukaan lineaarikuvausta vastaavan matriisin ominaisarvot eivät riipu kannasta, jonka suhteen matriisi kirjoitetaan. Tämä helpottaa monesti myös laskuja. Esimerkiksi jos kuvauksen matriisi on jonkin kannan suhteen yläkolmiomatriisi, ovat ominaisarvot helposti löydettävissä.

8*. Olkoon A matriisi, jolla on ominaisarvo λ. Osoita, että λ:aa vastaavat ominaisvektorit (ynnä nollavektori) muodostavat joukon $\operatorname{Null}(A - \lambda I)$.

Ratkaisu: Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat kunnassa K. Olkoon λ matriisin A ominaisarvo. Merkitään

$$V_\lambda = \{v \in K^n \mid v \text{ on } \lambda\text{:aa vastaava ominaisarvo tai } v = 0\}.$$

Oletetaan, että $v \in V_\lambda$. Tällöin pätee $Av = \lambda v$ ja edelleen $Av - \lambda I v = 0$. Tästä voidan päätellä, että $(A - \lambda I)v = 0$. Siis $v \in \operatorname{Null} A - \lambda I$.

Toisaalta, jos $v \in \operatorname{Null} A - \lambda I$, on $(A - \lambda I)v = 0$, eli $Av = \lambda v$. Siis $\operatorname{Null} A - \lambda I = \{v \mid Av = \lambda v\}$.

Ominaisarvoa λ vastaavan ominaisavaruuden mä« riteltiin olevan λ:aa vastaavien ominaisvektorien virittämä aliavaruus. Ei ole vaikea osoittaa, että kyseessä on sama joukko kuin yllä määritetty joukko V_λ. (Itse asiassa tulos seuraa siitä, että osoitimme juuri ominaisvektorien ja nollavektorin muodostavan joukon $\operatorname{Null}(A - \lambda I)$, joka on aliavaruus.)

Hyvin usein onkin hyödyllistä käsitellä ominaisarvoa λ vastaavaa ominaisavaruutta nolla-avaruutena $\operatorname{Null}(A - \lambda I)$.

Muista, että lineaarikuvauksen ydin on sama asia kuin kuvausta vastaavan matriisin nolla-avaruus. Jos siis tarkastellaan kuvausta L, jolla on ominaisarvo λ, on λ:aa vastaava ominaisavaruus $\operatorname{Ker}(L - \lambda \operatorname{id})$.

9*. Osoita, että ominaisarvoa λ vastaavat yleistetyt ominaisvektorit sekä nollavektori muodostavat aliavaruuden.

Ratkaisu: Olkoon A sellainen K-kertoiminen $n \times n$ matriisi, jolla on ominaisarvo $\lambda \in K$. Merkitään

$$U_\lambda = \{v \in K^n \mid v \text{ on yleistetty ominaisvektori tai } v = 0\}.$$

Haluamme näyttää, että U_λ on avaruuden K^n aliavaruus. Selvästikin pätee $U_\lambda \subset K^n$ ja $0 \in U_\lambda$, joten riittää näyttää, että $av+bw \in U_\lambda$ kaikilla $v, w \in U_\lambda$ ja $a, b \in K$. Mutta jos $v, w \in U_\lambda$, on joillakin $i, j \geq 1$ voimassa

$$(A - \lambda I)^i v = 0, \qquad (A - \lambda I)^j w = 0.$$

Olkoon k suurempi luvuista i ja j (tai i jos $i = j$). Nyt millä tahansa $a, b \in K$ saadaan

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)^k(av + bw) &= a(A - \lambda I)^k v + b(A - \lambda I)^k v \\ &= a(A - \lambda I)^{k-i}(A - \lambda I)^i v + b(A - \lambda I)^{k-j}(A - \lambda I)^j w = 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

eli $av + bw \in U_\lambda$. Siis U_λ on aliavaruus.

10*. Todista, että lineaarikuvauksen eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Ratkaisu: Oletetaan, että $L \colon V \to V$ on lineaarikuvaus ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sen eri ominaisarvoja. Valitaan näitä vastaavat ominaisvektorit $v_1, \ldots, v_n$. Tehdään vastaoletus: jono $(v_1, \ldots, v_n)$ ei ole vapaa. Silloin pisin näistä muodostettava vapaa jono on pituudeltaan $k < n$. Tarvittaessa numerointia muuttamalla voidaan tilanne palauttaa siihen, että kyseinen maksimaalinen vapaa jono on $(v_1, \ldots, v_k)$. Mutta nyt vastaoletuksen nojalla jono $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})$ on sidottu ja vektori v_{k+1} voidaan esittää lineaarikombinaationa

$$v_{k+1} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k, \tag{0.1}$$

jossa kaikki kertoimet a_i eivät ole nollia. Sijoittamalla tämä lineaarikuvaukseen L saadaan

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} v_{k+1} &= L(v_{k+1}) = L(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k) \\ &= a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) + \ldots + a_k L(v_k) = a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + a_k \lambda_k v_k. \end{aligned}$$

Toisaalta kertomalla yhtälöä (0.1) puolittain skalaarilla λ_{k+1} päädytään yhtälöön

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = a_1 \lambda_{k+1} v_1 + a_2 \lambda_{k+1} v_2 + \ldots + a_k \lambda_{k+1} v_k.$$

Kahdesta edellisestä yhtälöstä saadaan siten

$$a_1 v_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) + a_2 v_2 (\lambda_{k+1} - \lambda_2) + \ldots + a_k v_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = 0.$$

Mutta koska jono $(v_1, \ldots, v_k)$ on vapaa, täytyy olla $a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Koska ainakin yksi $a_i \neq 0$, on ainakin yhdellä i voimassa $\lambda_{k+1} = \lambda_i$. Tämä on ristiriita, sillä kyseessä oli eri ominaisarvot. Niinpä vastaoletus on väärä ja koko jono $(v_1, \ldots, v_n)$ on vapaa.

11*. Olkoon V vektoriavaruus, jonka dimensio on n. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus, jolla on n eri ominaisarvoa. Osoita, että kuvauksen L ominaisvektorit muodostavat avaruuden V kannan.

Ratkaisu: Oletetaan, että V on n-ulotteinen vektoriavaruus ja kuvauksella $L\colon V \to V$ on eri ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Edellisessä tehtävässä todistettiin, että näitä vastaavat ominaisvektorit $v_1, \ldots, v_n$ muodostavat vapaan jonon. Aikaisempien tietojen nojalla taas n-ulotteisen avaruuden n-alkioinen jono on väistämättä vapaa. Näin ollen jonon $(v_1, \ldots, v_n)$ on oltava kanta, koska siihen ei voida lisätä yhtään vektoria rikkomatta vapautta.

12*. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kirjoita kuvauksen L matriisi ominaisvektoreiden muodostamassa kannassa.

Ratkaisu: Olkoon siis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ominaisarvoja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vastaavien ominaisvektoreiden muodostama kanta. Kuten aiemmin, kuvauksen L

matriisi tämän kannan suhteen saadaan valitsemalla sarakkeiksi kantavektoreiden kuvien esitykset kannassa B.

$$\begin{aligned}[L]_B &= \Big[[L(v_1)]_B \quad \cdots \quad [L(v_n)]_B\Big] = \Big[\lambda_1[v_1]_B \quad \cdots \quad \lambda_n[v_n]_B\Big] \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Huomataan siis, että lineaarikuvauksen matriisin esitys ominaisvektoreiden muodostamassa kannassa (mikäli olemassa) on diagonaalimatriisi.

Tässä yksi syy siihen, miksi ominaisarvot ovat kiinnostavia. Jos ominaisvektoreista voidaan muodostaa kanta, näyttää kuvaus tämän kannan suhteen kirjoitettuna erittäin yksinkertaiselta. Aina ominaisvektoreista ei kuitenkaan pysty muodostamaan kantaa.

19*. Olkoon V vektoriavarus, jolla on kanta S. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus ja $[L]_S$ sitä esittävä matriisi. Oletetaan, että myös T on avaruuden V kanta. Osoita, että $\det[L]_S = \det[L]_T$. Mitä tulit todistaneeksi?

Ratkaisu: Olkoot siis S ja T kaksi avaruuden V kantaa, ja $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Olkoon A kannanvaihtomatriisi kannasta S kantaan T. Edellisen viikon tehtävien nojalla kuvausta esittäville matriiseille pätee $[L]_T = A[L]_S A^{-1}$. Niinpä

$$\begin{aligned}\det[L]_T &= \det A[L]_S A^{-1} = \det A \cdot \det[L]_S \cdot \det A^{-1} \\ &= \det A \cdot \frac{1}{\det A} \det[L]_S = \det[L]_S,\end{aligned}$$

mikä piti todistaa.

Näytimme siis, että lineaarikuvausta vastaavan matriisin determinantti ei muutu, vaikka matriisi kirjoitettaisiin eri kannan suhteen. Voidaan siis puhua lineaarikuvauksen determinantista, ja tuo determinantti voidaan laskea minkä tahansa kannan suhteen.

Tulos helpottaa laskuja tilanteessa, jossa lineaarikuvauksen matriisi voidaan kirjoittaa erityisen siististi muodossa jonkin kannan suhteen.