Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 3

Tähdellä merkityt laskuharjoitukset palautetaan kirjallisesti viimeistään pe 10.6. klo 10. Muut tehtävät käydään läpi laskuharjoituksissa pe 10.6. klo 10–12.

Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Sen *ydin* on joukko

$$\operatorname{Ker} L = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$$

ja *kuva*

$$\operatorname{Im} L = \{L(v) \mid v \in V\}.$$

Ydin on avaruuden V aliavaruus ja kuva ovat avaruuden W aliavaruus.

1*. Keksi lineaarikuvaus avaruudesta $\mathbb{R}^3$ avaruuteen $\mathbb{R}^4$.

2*. Mitkä ovat keksimäsi kuvauksen ydin ja kuva?

3*. Oletetaan, että lineaarikuvauksen $L\colon V \to W$ ydin on $\operatorname{Ker} L = \{0\}$. Osoita, että L on injektio. Onko tehtävässä 1 keksimäsi kuvaus injektio?

4. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.

a) Sama vektori voidaan kirjoittaa usealla eri tavalla koordinaattivektorina.

b) Lineaarikuvauksessa kannan kuva on kanta.

c) Lineaarikuvauksen ytimessä on aina vain yksi alkio.

d) Jos kantavektorien arvot tiedetään lineaarikuvauksessa, tiedetään kaikkien vektorien arvot.

e) Jos $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus, niin $\operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Im} L = \{0\}$.

5. Piirrä käsitekartta lineaarikuvauksiin liittyvistä käsitteistä ja tuloksista.

6. Päättele seuraavien lineaarikuvausten ominaisvektorit.

a) tason $\mathbb{R}^2$ kierto kulman θ ympäri

b) avaruuden $\mathbb{R}^3$ kierto vektorin v suuntaisen akselin ympäri

c) kohtisuora projektio tasossa vektorin $v \in \mathbb{R}^2$ suuntaiselle suoralle

d) polynomin derivointi (polynomiavaruuden kuvaus)

e) derivoituvan reaalifunktion derivointi (funktioavaruuden $C^1(\mathbb{R})$ kuvaus)

Vihje: Kohdassa e) voi käyttää integroimissääntöä $\int f'(x)/f(x)\,dx = \ln f(x) + C$.

Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat kunnassa K. Matriisin A ominaisarvoksi kutsutaan alkiota $\lambda \in K$, jolle $Av = \lambda v$ jollakin $v \in K^n \setminus \{0\}$. Matriiseja voidaan ajatella lineaarikuvauksina kunhan vain kannasta on sovittu. Matriisin ja sitä vastaavan lineaarikuvauksen ominaisarvot ovatkin sama asia, sillä matriisin ominaisarvot eivät riipu kannan valinnasta. (Tätä käsitellään alla olevassa tehtävissä.)

7*. Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta S. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus ja $[L]_S$ sitä esittävä matriisi. Olkoon vektori v sellainen, että $[L]_S[v]_S = \lambda[v]_S$ jollakin $\lambda \in K$.

Oletetaan, että myös T on avaruuden V kanta. Osoita, että $[L]_T[v]_T = \lambda[v]_T$. Mitä tulit todistaneeksi?

Vihje: Käytä kannanvaihtomatriisia.

Olkoon A $n \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat kunnassa K. Matriisin A nolla-avaruus on joukko $\operatorname{null} A = \{v \in K^n \mid Av = 0\}$. Jos matriisia ajatellaan lineaarikuvauksena, on sen nolla-avaruus sama asia kuin vastaavan lineaarikuvauksen ydin. Kuten ominaisarvot, myöskään nolla-avaruus ei riipu valitusta kannasta.

8*. Olkoon A matriisi, jolla on ominaisarvo λ. Osoita, että ominaisarvoa λ vastaavat ominaisvektorit (ynnä nollavektori) muodostavat joukon $\operatorname{null}(A - \lambda I)$.

Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat kunnassa K. Olkoon λ matriisin A ominaisarvo. Sitä vastaava *yleistetty ominaisvektori* on vektori $v \neq 0$, joka toteuttaa ehdon $(A - \lambda I)^j v = 0$ jollakin $j \in \mathbb{N}$. Jokainen ominaisvektori on siis yleistetty ominaisvektori.

9*. Osoita, että ominaisarvoa λ vastaavat yleistetyt ominaisvektori sekä nollavektori muodostavat aliavaruuden.

10*. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Alla on esitetty huonosti kirjoitettu todistus sille, että kuvauksen L eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Kirjoita todistus uudestaan hyvällä matemaattisella tyylillä.

$$
\begin{aligned}
&L \text{ lineaarikuvaus, } (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ ominaisvektorit} \\
&\text{ol. } (v_1, v_2, \ldots, v_k) \text{ pisin vapaa osajono} \\
&\Rightarrow v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \\
&\Rightarrow L(v_{k+1}) = L(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i) \\
&\Rightarrow \lambda_{k+1} v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i v_i \\
&\lambda_{k+1} v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k+1} a_i v_i \\
&\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{k+1}) a_i v_i \quad \text{RR}
\end{aligned}
$$

11*. Olkoon V vektoriavaruus, jonka dimensio on n. Olkoon $L \colon V \to V$ lineaarikuvaus, jolla on n eri ominaisarvoa. Osoita, että kuvauksen L ominaisvektorit muodostavat avaruuden V kannan.

12*. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kirjoita kuvauksen L matriisi ominaisvektorien muodostaman kannan suhteen.

13. Olkoon A jokin $\mathbb{C}$-kertoiminen $n \times n$-matriisi, ja $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Osoita, että löytyy kertoimet $a_0, \ldots, a_n$, jotka eivät ole kaikki nollia ja joille pätee

$$a_0 v + a_1 A v + a_2 A^2 v + \cdots + a_n A^n v = 0.$$

Vihje: Tutki vektorijonoa $(v, Av, A^2 v, \ldots, A^n v)$ ja muista, että avaruuden dimensio on n.

14. Jatkoa edelliseen tehtävään: Osoita, että löytyy kompleksiluvut $a \neq 0$ sekä $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, joille pätee

$$a(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_m I) v = 0.$$

Päättele, että matriisilla A on ainakin yksi (kompleksinen) ominaisarvo.

Seuraavissa tehtävissä lasketaan muutamien matriisien determinantteja. Neliömatriisin $A = \begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$ determinanttia merkitään $\det A = \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix}$. Tarkoituksena on käyttää alla annettuja laskusääntöjä (tai muualta opittuja menetelmiä). Determinantin määritelmää tarkastellaan myöhemmin.

Lineaarisuusominaisuuksia:

- Matriisin jonkin rivin tai sarakkeen kertominen vakiolla vastaa determinantin kertomista samalla vakiolla.
- Jos matriisissa on useampi kuin yksi sama rivi tai sarake, determinantti on nolla.
- Kahden rivin (tai sarakkeen) vaihtaminen keskenään muuttaa determinantin etumerkin vastakkaiseksi.
- Matriisin rivin (tai sarakkeen) kertominen vakiolla ja lisääminen toiseen riviin (tai sarakkeeseen) ei muuta determinanttia mitenkään.

Algebrallisia ominaisuuksia:

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det(A^{-1}) = 1/\det A$

Kehityskaava (rivin i suhteen): Olkoon $0 \leq i \leq n$. Matriisin $A \in K^{n\times n}$ determinantti on

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

missä A_{ij} on $(n-i) \times (n-i)$-matriisi, joka on saatu A:sta poistamalla i:s rivi ja j:s sarake. (Vastaavasti voidaan determinantti kehittää minkä tahansa sarakkeen suhteen.)

15. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 16 \\ 1/3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -1 & 16 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

determinantti.

16. Määritä matriisin
$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 16 \\ 1/3 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & -2 & 32 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
determinantti.

17. Määritä matriisin
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 & 16 \\ 1/3 & 0 & 3 & 0 \\ 8 & -2 & 12 & 32 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
determinantti.

18. Määritä matriisin
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 & 16 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
determinantti. Miten saamasi tulos yleistyy?

Lineaarikuvauksen determinantin määritellään olevan vastaavan matriisin determinantti. Tulemme näkemään, että lineaarikuvauksen determinantti ei riipu kannasta, jonka suhteen vastaava matriisi kirjoitetaan.

19*. Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta S. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus ja $[L]_S$ sitä esittävä matriisi. Oletetaan, että myös T on avaruuden V kanta. Osoita, että $\det[L]_S = \det[L]_T$. Mitä tulit todistaneeksi?

20.* Mikä oli tällä viikolla kaikkein hauskin tehtävä? Entä helpoin? Entä vaikein? Tuleeko mieleesi muuta palautetta? Käytkö pajassa tekemässä tehtäviä?