Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 2

Tähdellä merkityt laskuharjoitukset palautetaan kirjallisesti viimeistään pe 3.6. klo 10. Muut tehtävät käydään läpi laskuharjoituksissa pe 3.6. klo 10–12.

Olkoon $V$ $K$-vektoriavaruus, jolla on kanta $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Avaruuden $V$ vektori $v$ voidaan kirjoittaa kannan vektorien lineaarikombinaationa: $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ joillakin $a_i \in K$. Vektorin $v$ ilmaisemiseksi riittää siis tietää kertoimien $a_i$ arvot, ja tieto voidaan tiivistää sarakevektoriin

$$[v]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että kertoimet $a_i$ määräytyvät aina valitun kannan mukaan. Näin saatua sarakevektoria kutsutaan $v$:n *koordinaattivektoriksi* kannan $S$ suhteen.

1. Tiedetään, että avaruudella $\mathbb{R}^4$ on kanta

$$S = ((1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,1,1,0),\ (1,1,1,1)).$$

   Kirjoita vektori $v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ kannan $S$ alkioiden lineaarikombinaationa.

2. Millainen on edellisen tehtävän vektorin $v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ koordinaattivektori $[v]_S$?

3. Mitkä ovat vektorien

$$v_1 = (1,0,0,0),\ v_2 = (1,1,0,0),\ v_3 = (1,1,1,0) \text{ ja } v_4 = (1,1,1,1).$$

   koordinaattivektorit tehtävässä 1 esitetyn kannan $S$ suhteen?

4. Mitkä ovat edellisen tehtävän vektorien $v_1$, $v_2$, $v_3$ ja $v_4$ koordinaattivektorit luonnollisen kannan

$$E = ((1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,1,0))$$

   suhteen?

5. Jatkoa edellisiin tehtäviin. Etsi matriisi $A$, jolla kertomalla vektorien $v_1$, $v_2$, $v_3$ ja $v_4$ koordinaattivektorit kannan $S$ suhteen voidaan muuttaa koordinaattivektoreiksi kannan $E$ suhteen. Toisin sanoen $A[v_i]_S = [v_i]_E$ kaikilla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Kannattaa edetä sarake sarakkeelta.

6. Mitä edellisessä tehtävässä löytämäsi matriisi $A$ tekee vektorin $v = (a, b, c, d)$ koordinaattivektorille $[v]_S$?

7. Jatkoa edellisiin tehtäviin. Selvitä matriisi $B$, jolla kertomalla vektorien $v_1$, $v_2$, $v_3$ ja $v_4$ koordinaattivektorit kannan $E$ suhteen voidaan muuttaa koordinaattivektoreiksi kannan $S$ suhteen.

8. Merkitään

$$w_1 = (1, -1, 0, 0),\ w_2 = (0, 1, -1, 0),\ w_3 = (0, 0, 1, -1) \text{ ja } w_4 = (0, 0, 0, 1).$$

   Tiedetään, että $T = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ on avaruuden $\mathbb{R}^4$ kanta. Etsi matriisi, jolla kertomalla vektorin $v = (a, b, c, d)$ koordinaattivektori kannan $T$ suhteen voidaan muuttaa koordinaattivektoriksi kannan $E$ suhteen.

9. Jatkoa edelliseen tehtävään. Millä matriisilla kertomalla vektorin $v = (a, b, c, d)$ koordinaattivektori kannan $E$ suhteen voidaan muuttaa koordinaattivektoriksi kannan $T$ suhteen?

10. Jatkoa edellisiin tehtäviin. Millä matriisilla kertomalla vektorin $v = (a, b, c, d)$ koordinaattivektori kannan $S$ suhteen voidaan muuttaa koordinaattivektoriksi kannan $T$ suhteen?

Olkoot $S$ ja $T$ avaruuden $V$ kantoja. Tällöin on olemassa kääntyvä matriisi $P$, jolle pätee $P[v]_S = [v]_T$ kaikilla $v \in V$. Matriisia $P$ kutsutaan *kannanvaihtomatriisiksi.*

11.* Keksi kaksi erilaista avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantaa, joista kumpikaan ei ole luonnollinen kanta. Määritä kannanvaihtomatriisi kantojen välille.

Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Oletetaan, että $S$ on avaruuden $V$ kanta ja $T$ on avaruuden $W$ kanta. Jokainen avaruuden $V$ vektori voidaan ilmaista sarakevektorina kannan $S$ suhteen, ja vektorien kuvat voidaan ilmaista sarakevektorina kannan $T$ suhteen. Lisäksi lineaarikuvaus $L$ voidaan esittää matriisina $[L]_{S,T}$ seuraavasti. Kun matriisilla $[L]_{S,T}$ kertoo sarakevektoria $[v]_S$, saa saman tuloksen kuin kuvaamalla vektoria $v$ kuvauksella $L$. Toisin sanoen $[L(v)]_T = [L]_{S,T}[v]_S$. Huomaa, että lineaarikuvauksen matriisiesitys riippuu aina valitusta kannasta.

Koska lineaarikuvauksen arvot määräytyvät täysin kannan arvojen avulla, saadaan matriisin $[L]_{S,T}$ alkiot kantavektoreiden arvoista kuvauksessa $L$.

12.* Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad L(a,b,c,d) = (-\frac{1}{2}a + b, a - b + 7d, a - d).$$

Kirjoita sen matriisi $[L]_{E_4,E_3}$ avaruuksien $\mathbb{R}^4$ ja $\mathbb{R}^3$ luonnollisten kantojen $E_4$ ja $E_3$ suhteen. Voit tarkistaa vastauksesi kertomalla saamallasi matriisilla kantavektoreita.

Oletetaan, että $L\colon V \to V$ on lineaarikuvaus. Olkoot $S$ ja $T$ avaruuden $V$ kantoja. Kannan $S$ suhteen kirjoitettulle matriisille $[L]_{S,S}$ käytetään lyhyyden vuoksi merkintää $[L]_S$. Samalla tavoin merkitään $[L]_{T,T} = [L]_T$.

Kannanvaihtomatriisin avulla voidaan muuttaa lineaarikuvauksen $L$ matriisiesitys kannasta toiseen. Oletetaan, että $P$ on kannanvaihtomatriisi kannasta $S$ kantaan $T$. Tällöin

$$P^{-1}[L]_T P = [L]_S.$$

Tulos voidaan selittää seuraavalla tavalla: Oletetaan, että tiedetään matriisi $[L]_T$, eli tiedetään, mitä kuvaus $L$ tekee koordinaattivektoreille, jotka on kirjoitettu kannan $T$ suhteen. Halutaan tietää, miltä näyttää matriisi $[L]_S$, eli miten kuvaus $L$ toimii kannan $S$ suhteen. Ensin siirrytään kannasta $S$ kantaan $T$ kannanvaihtomatriisilla $P$. Nyt ollaan kannassa $T$ ja voidaan käyttää matriisia $[L]_T$. Sen jälkeen siirrytään matriisilla $P^{-1}$ takaisin kantaan $S$.

13*. Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4, \quad L(a,b,c,d) = (4a - b - c - d, 3a - c - d, 2a - d, a).$$

Esitä lineaarikuvauksen $L$ matriisi $[L]_E$ luonnollisen kannan suhteen. Esitä sitten kuvauksen matriisi $[L]_S$ tehtävässä 1 esitetyn kannan $S$ suhteen. Käytä kannanvaihtomatriisia.

14. Mitä kaikkea tiedät vektoriavaruuksien kannoista? Entä dimensiosta? Kerää tulokset yhteen.

15*. Oletetaan, että $V$ on $K$-kertoiminen vektoriavaruus, jolla on aliavaruus $U$. Osoita, että myös $U$ on $K$-kertoiminen vektoriavaruus. Selitä, miksi aliavaruus määritellään niin kuin se määritellään.

16*. Oletetaan, että $V = U + W$. Osoita, että $V = U \oplus W$ täsmälleen silloin, kun $U \cap W = \{0\}$.

17. Osoita, että vektoriavaruus $\mathbb{R}^4$ on aliavaruuksiensa

$$U = \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{ja} \quad W = \{(a, a, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

suora summa.

18. Etsi jotkin kannat edellisen tehtävän avaruuksille $U$ ja $W$. Muodosta näiden kantojen avulla kanta avaruudelle $V$.

Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Joukko $W \subset V$ on *vakaa* kuvauksessa $L$, jos $L(v) \in W$ kaikilla $v \in W$.

19. Osoita, että tehtävän 17 aliavaruudet $U$ ja $W$ ovat molemmat vakaita kuvauksessa

$$L\colon \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4, \quad (a, b, c, d) \mapsto (2b + c + 2d, -a + 2b + 2c + 2d, 3c + 2d, c + d).$$

20. Jatkoa edelliseen. Nyt voidaan määritellä kuvaus $L_U\colon U \to U$, $u \mapsto L(u)$. Määritä kuvauksen $L_U$ matriisi tehtävässä 18 löytämäsi kannan suhteen.

21. Jatkoa edelliseen. Samalla tavalla voidaan määritellä kuvaus $L_W\colon W \to W$, $w \mapsto L(w)$. Määritä kuvauksen $L_W$ matriisi löytämäsi kannan suhteen.

22. Jatkoa edelliseen. Määritä lopuksi kuvauksen $L$ matriisi tehtävässä 18 löytämäsi avaruuden $\mathbb{R}^4$ kannan suhteen.

Yleistetään virittämisen määritelmä koskemaan myös äärettömiä vektorijoukkoja. Olkoon $V$ vektoriavaruus ja $S$ jokin joukko avaruuden $V$ vektoreita. Joukon $S$ vektoreiden virittämä aliavaruus koostuu kaikista lineaarikombinaatioista, jotka voidaan muodostaa äärellisestä määrästä joukon $S$ vektoreita. Toisin sanoen

$$\operatorname{span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mid v_i \in S,\ a_i \in K,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Jos lineaarikuvauksen $L$ lähtö ja maalijoukko ovat samat, voidaan määritellä kuvauksen $n$:s potenssi $L^n$. Se on kuvaus

$$L^n\colon V \to V, \quad v \mapsto \underbrace{L(L(\ldots L(v)))}_{n \text{ kpl}}.$$

Kuvaus $L$ suoritetaan siis $n$ kertaa.

23*. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarikuvaus. Oletetaan, että $v \in V$. Osoita, että aliavaruus $\operatorname{span}(v, L(v), L^2(v), L^3(v), \dots)$ on vakaa kuvauksessa $L$.

Olkoon $L\colon V \mapsto V$ lineaarikuvaus. Jos on olemassa $\lambda \in K$, jolle pätee $L(v) = \lambda v$ jollakin $v \in V \setminus \{0\}$, sanotaan, että $\lambda$ on kuvauksen $L$ *ominaisarvo*. Vektori $v$ on ominaisarvoa vastaava *ominaisvektori*. Ominaisarvoa $\lambda$ vastaavien ominaisvektorien virittämää aliavaruutta kutsutaan $\lambda$:n *ominaisavaruudeksi*.

24*. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $L(a, b) = (b, a)$. Määritä kuvauksen kaikki ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit. Käytä ominaisarvon määritelmää.

25*. Osoita, että lineaarikuvauksen ominaisavaruudet ovat vakaita.

26. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{C}^4 \mapsto \mathbb{C}^4$, jota esittää matriisi

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & -16 & \sqrt{5} \\ 0 & -4 & 1000 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Etsi neljä eri ominaisarvoa kuvaukselle $L$.

27. Osaatko yleistää edellisen tehtävän tulosta?

28*. Miltä tämän viikon tehtävät tuntuivat?