Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 1A

Seuraavia tehtäviä ei tarvitse palauttaa eikä niitä käsitellä laskuharjoituksissa.

Tällä kurssilla tarkastelemme reaali- ja kompleksikertoimisia vektoriavaruuksia. Merkintöjen helpottamiseksi puhumme K-kertoimisista vektoriavaruuksista, missä K on joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Jos kerroinkuntaa ei erikseen mainita, sen oletetaan olevan K. Avaruus K^n koostuu kaikista n-jonoista, joiden komponentit ovat joukossa K. Esimerkiksi $(2, 5, -1)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ alkio.

Lisätieto kurssin Algebra I käyneille: Vektoriavaruus voidaan määritellä minkä tahansa kunnan suhteen ja lähes kaikki tulokset pätevät myös silloin. Todistuksetkin pysyvät ennallaan. Useimmiten voit siis ajatella symbolin K tarkoittavan mitä tahansa kuntaa.

Olkoon V K-kertoiminen vektoriavaruus. Sen vektorijono $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ on *vapaa*, jos seuraava ehto pätee: jos $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ joillakin $a_i \in K$, niin $a_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

1. Onko avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijono $((5, 4, -6),\ (5/2, 2, -3))$ vapaa?
2. Onko avaruuden $\mathbb{C}^2$ vektorijono $((5i, 2),\ (1/4, 2))$ vapaa?
3. Onko avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektorijono $((1, 1, 1, 1),\ (1, 1, 1, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (1, 0, 0, 0))$ vapaa?

Olkoot $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$. Määritellään

$$\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m \mid a_i \in K\}.$$

Tämä osajoukko osoittautuu avaruuden V aliavaruudeksi. Sitä kutsutaan jonon $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ *virittämäksi* aliavaruudeksi. Alkiota $\sum_{i=0}^m a_i v_i$, missä $a_i \in K$, kutsutaan vektorien $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *lineaarikombinaatioksi*.

4. Osoita, että mikä tahansa avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektori voidaan kirjoittaa vektorien $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$ ja $(1, 0, 0, 0)$ lineaarikombinaationa.
5. Osoita, että

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{span}((1, 1, 1, 1),\ (1, 1, 1, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (1, 0, 0, 0)).$$

Jono $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ on avaruuden V *kanta*, jos S on vapaa ja virittää avaruuden V. Esimerkiksi avaruudella $\mathbb{R}^n$ on niin kutsuttu luonnollinen kanta $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, missä

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

(ykkönen on i:nnellä paikalla).

6. Näytä, että avaruudella $\mathbb{R}^4$ on kanta $((1,1,1,1),\ (1,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (1,0,0,0))$.

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to W$ on *lineaarikuvaus*, jos

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \quad \text{ja} \quad L(av_1) = aL(v_1)$$

kaikilla $v_1, v_2 \in V$ ja $a \in K$.

Vektoriavaruuden K^n vektori $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ voidaan samastaa $n \times 1$-matriisin

$$[v] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

kanssa. Tällöin vektorin ajatellaan olevan avaruuden $K^{n\times 1}$ alkio. Useimmiten vektorit v ja $[v]$ samastetaan, samoin avaruudet K^n ja $K^{n\times 1}$.

Jos vektoriavaruuden K^n alkioita ajatellaan sarakematriiseina kuten yllä, voidaan myös lineaarikuvaukset kirjoittaa matriiseina. Olkoon $L\colon K^n \mapsto K^m$ lineaarikuvaus. Sitä vastaava matriisi $[L]$ saadaan ehdosta

$$[L(v)] = [L][v] \quad \text{kaikilla } v \in K^n.$$

Lineaarikuvauksen arvot määritetään siis matriisikertolaskun avulla. Vastaavasti jokaisesta matriisista saadaan lineaarikuvaus. Asiaan tutustutaan tarkemmin seuraavissa tehtävissä.

7. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a,b) = (3a + 4b, 2a - 5b)$. Määritä $L(1,0)$ ja $L(0,1)$.

8. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus. Oletetaan lisäksi, että $L(1,0,0) = (3,5,1)$, $L(0,1,0) = (1,1,1)$ ja $L(0,0,1) = (-4,6,-1)$. Määritä $L(1,2,3)$.

9. Oletetaan, että $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Olkoon L edellisen tehtävän lineaarikuvaus. Määritä $L(a,b,c)$.

10. Tutkitaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 16 & \sqrt{5} \\ 1/3 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta L. Nyt siis $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $L(v) = Av$ Määritä sarakevektorien $[1,0,0,0]^T$, $[0,1,0,0]^T$, $[0,0,1,0]^T$ ja $[0,0,0,1]^T$ kuvat.

11. Tarkastellaan vielä edellisen tehtävän kuvausta L. Olkoon $[a,b,c,d]^T \in \mathbb{R}^4$. Määritä $L([a,b,c,d]^T)$ samalla tavalla kuin tehtävässä 9 eli käyttämällä tietoa kantavektorien arvoista. Määritä sitten $L([a,b,c,d]^T)$ käyttämällä kuvauksen L määritelmää.

12. Millainen on tehtävän 7 lineaarikuvauksen L matriisi?

13. Millainen on lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(a,b,c) = (a-b+4c,\ 2b+10c)$ matriisi?

Olkoot U ja W vektoriavaruuden V aliavaruuksia. Merkitään

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

14. Määritellään $U = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ja $W = \{(0,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Määritä summa $U + W$.

15. Määritellään $U = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ja $W = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Määritä summa $U + W$.

16. Määritellään $U = \{(a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ja $W = \{(0,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Määritä summa $U + W$.