Lineaarialgebran jatkokurssi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2011
Harjoitus 1

Tähdellä merkityt laskuharjoitukset palautetaan kirjallisesti viimeistään to 26.5. klo 10. Muut tehtävät käydään läpi laskuharjoituksissa to 26.5. klo 10–12.

1.* Olkoon V vektoriavaruus, joka sisältää vektorit $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Osoita, että

$$\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

on avaruuden V aliavaruus.

2.* Olkoon V vektoriavaruus. Oletetaan, että sen aliavaruus U sisältää vektorit $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Osoita, että

$$\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_n) \subset U.$$

3.* Osoita, että aliavaruus $\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ on pienin aliavaruus, joka sisältää vektorit $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

4. Luettele kolme erilaista avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantaa.

5.* Olkoon $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ avaruuden V kanta. Osoita, että jokainen avaruuden V alkio voidaan kirjoittaa kannan S alkioiden lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla.

6. Oletetaan, että avaruuden V jono $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ on vapaa. Olkoon $w \in V$ vektori, jolle pätee $w \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. Osoita, että jono $(v_1, v_2, \ldots, v_m, w)$ on vapaa. Ilmaise todistamasi tulos sanallisesti.

7. Oletetaan, että vektorijono $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ virittää avaruuden V. Käy läpi jonon S vektoreita järjestyksessä ja etsi vapaa osajono, joka edelleen virittää avaruuden V. Näin saat aikaan avaruuden V kannan. Ilmaise todistamasi tulos sanallisesti.

8. Oletetaan, että avaruuden V vektorijono $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ on vapaa. Oletetaan, että jono $R = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ virittää avaruuden V. Käy läpi jonon R vektoreita ja lisää niitä jonoon S tarpeen mukaan niin, että saat aikaan avaruuden V kannan. Ilmaise todistamasi tulos sanallisesti.

9.* Olkoot U ja W vektoriavaruuden V aliavaruuksia. Osoita, että $U + W$ on avaruuden V aliavaruus.

Olkoon $V = U + W$. Oletetaan, että jokainen alkio $v \in V$ voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla summana $v = u + w$, missä $u \in U$ ja $w \in W$. Tällöin merkitään $V = U \oplus W$ ja sanotaan, että summa $U + W$ on *suora*.

10. Ilmaise avaruus $\mathbb{R}^3$ kolmella eri tavalla aliavaruuksiensa suorana summana.

11. Anna esimerkki avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruuksista, joiden summa ei ole suora.

12.* Oletetaan, että $V = U + W$ ja $U \cap W = \{0\}$. Osoita, että $V = U \oplus W$.

13. Oletetaan, että $V = U \oplus W$. Miten voit muodostaa avaruuden V kannan aliavaruuksien U ja W kantojen avulla?

14. Oletetaan, että $V = U + W$. Päteekö yllä osoittamasi tulos edelleen?

15.* Oletetaan, että U on vektoriavaruuden V aliavaruus. Olkoot aliavaruudet W_1 ja W_2 sellaisia, että $V = U \oplus W_1$ ja $V = U \oplus W_2$. Päteekö tällöin $W_1 = W_2$?

Seuraavissa tehtävissä kaikilla vektoriavaruuksilla on sama kerroinkunta.

16.* Oletetaan, että $V = \mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. Olkoon $L\colon V \to W$ surjektiivinen lineaarikuvaus. Osoita, että $W = \mathrm{span}(L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_m))$.

17.* Olkoon $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektoriavaruuden V kanta ja $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Oletetaan, että $L(v_i) = a_i$, kun $v_i \in S$. Olkoon $v \in V$. Miten voit ilmaista vektorin $L(v)$ arvojen a_i avulla? Mitä tulit osoittaneeksi?

18. Oletetaan, että V ja W ovat vektoriavaruuksia, joilla on kannat $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ja $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Osoita, että avaruuksien V ja W välillä on isomorfismi (eli bijektiivinen lineaarikuvaus). Ilmaise todistamasi tulos sanallisesti.

19.* Miltä tämän viikon tehtävät tuntuivat?