LINEAARIALGEBRA II
802119P

LUENTOMONISTE

ja

HARJOITUSTEHTÄVÄT

syksy 2008

V SISÄTULOAVARUUKSISTA

1. Sisätulon määritelmä

Tarkastellaan sisätulon määrittelyä varten kompleksilukujen joukkoa

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

missä *imaginaariyksikkö* i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$. Kompleksilukujen yhtäsuuruus sekä yhteen- ja kertolasku määritellään asettamalla

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \text{jos ja vain jos} \quad x_1 = x_2 \text{ ja } y_1 = y_2;$$
$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$
$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Kompleksiluvuilla lasketaan siis muuten samoin kuin reaaliluvuilla, mutta $i^2 = -1$. Luvun $z = x + iy$ *reaaliosa* on Re $z = x$ ja *imaginaariosa* Im $z = y$. Lukua $\bar{z} = x - iy$ sanotaan luvun z *liittoluvuksi* eli *kompleksikonjugaatiksi*. Koska $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$, missä $|z|$ on luvun z *itseisarvo*, niin luvun z käänteisluku on

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad \text{aina, kun } z \neq 0.$$

Määritelmä. Olkoon V K-kertoiminen ($K = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$) vektoriavaruus. Kuvausta $V \times V \to K\colon (X, Y) \mapsto (X|Y)$ sanotaan *sisätuloksi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

ST1. $(X|Y) = \overline{(Y|X)}$ aina, kun $X, Y \in V$;

ST2. $(X + Y|Z) = (X|Z) + (Y|Z)$ aina, kun $X, Y, Z \in V$;

ST3. $(aX|Y) = a(X|Y)$aina, kun $a \in K$ ja $X, Y \in V$;

ST4. $(X|X) \geq 0$ aina, kun $X \in V$, ja $(X|X) = 0$ jos ja vain jos $X = \underline{0}$.

Huomautus. 1) Jos $K = \mathbb{R}$, niin $(X|Y) = (Y|X)$ ehdon ST1 mukaan.

2) Ehdosta ST2 saadaan: Jos $X = \underline{0}$ tai $Y = \underline{0}$, niin $(X|Y) = 0$.

3) Ehdoista ST2 ja ST3 saadaan induktiolla

$$(c_1X_1 + \cdots + c_nX_n|Y) = c_1(X_1|Y) + \cdots + c_n(X_n|Y).$$

Käyttämällä lisäksi ehtoa ST1 saadaan myös

$$(Y|c_1X_1 + \cdots + c_nX_n) = \overline{c_1}(Y|X_1) + \cdots + \overline{c_n}(Y|X_n).$$

4) Jos $(X|Y_1) = (X|Y_2)$ aina, kun $X \in V$, niin $Y_1 = Y_2$. Näin on, sillä $(X|Y_1 - Y_2) = 0$ aina, kun $X \in V$. Erityisesti, kun $X = Y_1 - Y_2$, joten $(Y_1 - Y_2|Y_1 - Y_2) = 0$. Ehdon ST4 nojalla on oltava $Y_1 - Y_2 = \underline{0}$ eli $Y_1 = Y_2$.

Määritelmä. Sisätulolla varustettua lineaarista avaruutta sanotaan *sisätuloavaruudeksi.* Reaalista äärellisulotteista sisätuloavaruutta sanotaan *euklidiseksi* avaruudeksi ja vastaava kompleksista avaruutta *unitaariseksi* avaruudeksi.

Esimerkkejä. 1) Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ vektorien

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sisätulo voidaan määritellä yhtälöllä

$$(X|Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Tällöin käytetään myös merkintää $(X|Y) = X \cdot Y$ ja puhutaan *pistetulosta* tai *skalaaritulosta.* Samaistamalla skalaarit ja 1×1-matriisit voidaan myös asettaa

$$(X|Y) = X^{\mathrm{T}}Y.$$

2) Yhtälö

$$(X|Y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

määrittelee sisätulon avaruuteen $\mathbb{C}^n$. Tällöin $(X|Y) = X^{\mathrm{T}}\overline{Y}$, missä vektori $\overline{Y}$ saadaan korvaamalla vektorin Y koordinaatit liittoluvuillaan.

3) Tarkastellaan välillä $[a, b]$ jatkuvien reaalifunktioiden muodostamaa vektoriavaruutta $C([a, b])$. Yhtälö

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

määrittelee sisätulon avaruuteen $C([a, b])$.

2. Vektorin pituus eli normi

Sisätuloavaruudessa V voidaan määritellä vektorin pituus seuraavasti.

Määritelmä. Vektorin $X \in V$ *pituus* eli *normi* $||X||$ määritellään asettamalla

$$||X|| = \sqrt{(X|X)}.$$

Huomautus. 1) Ehdon ST4 mukaan $||X|| \geq 0$ ja $||X|| = 0$ jos ja vain jos $X = \underline{0}$.

2) Koska

$$||cX||^2 = (cX|cX) \underset{\mathrm{ST3}}{=} c\,(X|cX) \underset{\mathrm{ST1}}{=} c\,(\overline{cX|X}) \underset{\mathrm{ST3}}{=} c\,\bar{c}\,(\overline{X|X}) \underset{\mathrm{ST1}}{=} c\,\bar{c}\,(X|X),$$

niin $||cX|| = |c|\ ||X||$.

3) Jos $X \neq \underline{0}$, niin vektori $\frac{X}{||X||}$ on ns. *yksikkövektori* eli vektori, jonka pituus on 1.

Esimerkkejä.

Lause 2.1 (Schwarzin epäyhtälö). $|(X|Y)| \leq ||X||\ ||Y||$. Yhtäsuuruus pätee tässä jos ja vain jos joukko $\{X, Y\}$ on lineaarisesti riippuva.

Todistus. Jos $Y = \underline{0}$, niin kummankin puolen arvo on 0 ja $\{X, Y\}$ on lineaarisesti riippuva. Näin ollen väitteet pätevät tässä tapauksessa.

Oletetaan lopputodistuksen ajan, että $Y \neq \underline{0}$. Tällöin jokaiselle $a \in \mathbb{C}$ pätee

$$\begin{aligned} 0 &\leq (X + aY|X + aY) = (X|X + aY) + (aY|X + aY) \\ &= (X|X) + (X|aY) + a(Y|X) + a(Y|aY) \\ &= ||X||^2 + \bar{a}(X|Y) + a(\overline{X|Y}) + a\bar{a}||Y||^2. \end{aligned}$$

Valitsemalla tässä $a = t(X|Y)$, $t \in \mathbb{R}$, saadaan

$$||X||^2 + 2t|(X|Y)|^2 + t^2|(X|Y)|^2\ ||Y||^2 \geq 0 \quad \text{aina, kun } t \in \mathbb{R}.$$

Vasen puoli saa pienimmän arvonsa, kun $t = -\frac{1}{||Y||^2}$. Epäyhtälö on tällöin

$$||X||^2 - 2\frac{|(X|Y)|^2}{||Y||^2} + \frac{|(X|Y)^2|}{||Y||^2} \geq 0$$

eli

$$||X||^2\ ||Y||^2 \geq |(X|Y)|^2. \tag{1}$$

Ensimmäinen väite seuraa tästä.

Jos epäyhtälössä (1) on yhtäsuuruus, niin yhtäsuuruuden on oltava myös jokaisessa aiemmassa vaiheessa. Erityisesti $(X + aY|X + aY) = 0$, kun $a = -(X|Y)/||Y||^2$. Ehdon ST4 mukaan tällöin $X + aY = \underline{0}$, ja $\{X, Y\}$ on lineaarisesti riippuva. Toisaalta, jos $\{X, Y\}$ on lineaarisesti riippuva, niin $X = cY$ jollakin $c \in \mathbb{C}$ (itse asiassa on oltava $c = (X|Y)/||Y||^2$). Täten

$$\begin{aligned} |(X|Y)| &= |(cY|Y)| = |c(Y|Y)| = |c|\ ||Y||^2 = |c|\ ||Y||\ ||Y|| = ||cY||\ ||Y|| \\ &= ||X||\ ||Y||. \quad \text{mot} \end{aligned}$$

Lauseen 2.1 nojalla saadaan seuraava tärkeä tulos.

Lause 2.2 (kolmioepäyhtälö).

$$|\ ||X|| - ||Y||\ | \leq ||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||.$$

Todistus. Schwarzin epäyhtälön avulla saadaan

$$\begin{aligned}||X+Y||^2 &= (X+Y|X+Y) = (X|X) + (X|Y) + (Y|X) + (Y|Y) \\ &= ||X||^2 + 2\mathrm{Re}\,(X|Y) + ||Y||^2 \le ||X||^2 + 2|(X|Y)| + ||Y||^2 \\ &\underset{\text{Schwarz}}{\le} ||X||^2 + 2||X||\,||Y|| + ||Y||^2 = (||X|| + ||Y||)^2.\end{aligned}$$

Koska kummankin puolen arvo on vähintään 0, niin $||X+Y|| \le ||X|| + ||Y||$ ja saatiin jälkimmäinen epäyhtälö. Tämän avulla saadaan nyt

$$\begin{aligned}||X|| &= ||X+Y-Y|| \le ||X+Y|| + ||Y|| \qquad \text{ja} \\ ||Y|| &= ||X+Y-X|| \le ||X+Y|| + ||X||\end{aligned}$$

eli $-||X+Y|| \le ||X|| - ||Y|| \le ||X+Y||$. Ensimmäinen epäyhtälö seuraa tästä. mot

3. Ortogonaalisuus

Määritelmä. Sisätuloavaruuden vektorien X ja Y sanotaan olevan *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos $(X|Y) = 0$. Tätä merkitään $X \perp Y$.

Lause 3.1 (Pythagoraan lause). Jos $X \perp Y$, niin

$$||X+Y||^2 = ||X-Y||^2 = ||X||^2 + ||Y||^2.$$

Todistus. Oletetaan, että $X \perp Y$. Tällöin

$$\begin{aligned}||X+Y||^2 &= (X+Y|X+Y) = (X|X+Y) + (Y|X+Y) \\ &= ||X||^2 + (X|Y) + (Y|X) + ||Y||^2 = ||X||^2 + ||Y||^2. \quad \text{mot}\end{aligned}$$

Esimerkkejä.

Jos V on reaalinen sisätuloavaruus ja $X,\ Y \in V \setminus \{\underline{0}\}$, niin vektorien X ja Y välinen kulma $\omega(X,Y)$ määritellään asettamalla

$$\cos\omega(X,Y) = \frac{(X|Y)}{||X||\,||Y||}, \quad 0 \le \omega(X,Y) \le \pi.$$

Huomautus. Jos $X \perp Y$, niin $\omega(X,Y) = \frac{\pi}{2}$. Edelleen

$$\omega(X,aX) = \begin{cases} 0, & \text{jos } a > 0, \\ \pi, & \text{jos } a < 0. \end{cases}$$

4. Ortogonaalinen ja ortonormaali kanta

Määritelmä. Sisätuloavaruuden V epätyhjää osajoukkoa S sanotaan *ortogonaaliseksi*, jos $\underline{0} \notin S$ ja $X \perp Y$ aina, kun $X,\ Y \in S$ ja $X \ne Y$. Ortogonaalista joukkoa S sanotaan *ortonormaaliksi*, jos $||X|| = 1$ aina, kun $X \in S$.

Esimerkkejä.

Lause 4.1. Jos S on ortogonaalinen joukko, niin se on lineaarisesti riippumaton.

Todistus. Oletetaan, että $\{U_1, \dots, U_p\} \subseteq S$ ja $x_1U_1 + \cdots + x_pU_p = \underline{0}$. Koska $(U_j|U_i) = 0$ aina, kun $i \neq j$, niin

$$\begin{aligned} 0 &= (\underline{0} \mid U_i) = (x_1U_1 + \cdots + x_pU_p|U_i) \\ &= x_1(U_1|U_i) + \cdots + x_p(U_p|U_i) = x_i(U_i|U_i) = x_i||U_i||^2 \end{aligned}$$

jokaisella $i = 1, \dots, p$. Tässä $||U_i||^2 \neq 0$, joten $x_1 = \cdots = x_p = 0$. Siis $\{U_1, \dots, U_p\}$ on lineaarisesti riippumaton. mot

Lause 4.2. Olkoon V äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja $\{U_1, \dots, U_n\}$ sen ortogonaalinen kanta. Tällöin

$$X = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X|U_i)}{||U_i||^2} U_i \qquad \text{aina, kun } X \in V.$$

Jos kanta on ortonormaali ($||U_i|| = 1$ jokaisella i), niin

$$X = \sum_{i=1}^{n} (X|U_i)U_i \qquad \text{aina, kun } X \in V.$$

Huomautus. Vektorin X koordinaatteja ortonormaalin kannan $\{U_1, \dots, U_n\}$ suhteen sanotaan vektorin X Fourier'n kertoimiksi; ne ovat $a_i = (X|U_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Todistus. Olkoon $X = c_1U_1 + \cdots + c_nU_n$. Jokaisella $i = 1, \dots, n$

$$(X|U_i) = c_1(U_1|U_i) + \cdots + c_n(U_n|U_i) = c_i(U_i|U_i) = c_i||U_i||^2,$$

joten

$$c_i = \frac{(X|U_i)}{||U_i||^2}, \quad i = 1, \dots, n. \qquad \text{mot}$$

Lause 4.3 (Gram–Schmidt). Olkoon $S = \{X_1, \dots, X_p\}$ sisätuloavaruuden V lineaarisesti riippumaton joukko. Tällöin on olemassa sellainen avaruuden V ortonormaali joukko $F = \{U_1, \dots, U_p\}$, että $L(S) = L(F)$.

Todistus. Todistuksessa esitetään ns. Gramin–Schmidtin ortonormeerausmenetelmä. Aluksi todetaan, että $X_i \neq \underline{0}$ aina, kun $i = 1, \dots, p$, koska S on lineaarisesti riippumaton. Valitaan nyt $U_1 = X_1/||X_1||$, jolloin $||U_1|| = 1$ ja $L(\{X_1\}) = L(\{U_1\})$.

Merkitään $Z_2 = X_2 - (X_2|U_1)U_1$, jolloin

$$(Z_2|U_1) = (X_2|U_1) - (X_2|U_1)||U_1||^2 = 0.$$

Jos $Z_2 = \underline{0}$, niin $X_2 = kX_1$, mikä on mahdotonta, koska $\{X_1, X_2\}$ on lineaarisesti riippumaton. Siis $Z_2 \neq 0$, joten voidaan määritellä $U_2 = Z_2/||Z_2||$. Nyt $\{U_1, U_2\}$ on ortonormaali ja $L(\{X_1, X_2\}) = L(\{U_1, U_2\})$.

Täydennetään todistus induktiolla. Induktio-oletus: $\{U_1, \ldots, U_{k-1}\}$ on ortonormaali ja $L(\{X_1, \ldots, X_{k-1}\}) = L(\{U_1, \ldots, U_{k-1}\})$, missä $k \leq p$. Jos merkitään

$$P_k = (X_k|U_1)U_1 + \cdots + (X_k|U_{k-1})U_{k-1}, \quad Z_k = X_k - P_k,$$

niin

$$(Z_k|U_j) = (X_k|U_j) - (X_k|U_j)||U_j||^2 = 0 \quad \text{aina, kun } j = 1, \ldots, k-1.$$

Jos $Z_k = \underline{0}$, niin $X_k = P_k \in L(\{U_1, \ldots, U_{k-1}\}) = L(\{X_1, \ldots, X_{k-1}\})$, mikä on mahdotonta, koska joukko $\{X_1, \ldots, X_{k-1}, X_k\}$ on lineaarisesti riippumaton. Määritellään $U_k = Z_k/||Z_k||$, jolloin $\{U_1, \ldots, U_{k-1}, U_k\}$ on ortonormaali. Lisäksi $L(\{U_1, \ldots, U_k\}) = L(\{X_1, \ldots, X_k\})$. Väite induktioperiaatteesta seuraa. mot

Seuraus. Jokaisella äärellisulotteisella sisätuloavaruudella on ortonormaali kanta.

Esimerkkejä.

5. Ortogonaalinen eli kohtisuora komplementti

Määritelmä. Sisätuloavaruuden V osajoukon $S \neq \emptyset$ *ortogonaali* eli *kohtisuora komplementti* $S^\perp$ määritellään asettamalla

$$S^\perp = \{X \in V | (X|Y) = 0 \quad \text{aina, kun } Y \in S\}.$$

Esimerkkejä.

Lause 5.1. Ortogonaalinen komplemntti $S^\perp$ on avaruuden V aliavaruus. Jos $\underline{0} \in S$, niin $S \cap S^\perp = \{\underline{0}\}$, muutoin $S \cap S^\perp = \emptyset$.

Todistus. Olkoot $X_1, X_2 \in S^\perp$ ja $a \in K$. Jokaisella $Y \in S$ pätee

$$(X_1 + X_2|Y) = (X_1|Y) + (X_2|Y) = 0, \quad (aX_1|Y) = a(X_1|Y) = 0$$

ja $(\underline{0}|Y) = 0$, joten $X_1 + X_2, aX_1$ ja $\underline{0} \in S^\perp$ eli VA1, VA2 ja VA3 toteutuvat.

Jos $X \in S \cap S^\perp$, niin $(X|X) = 0$ ja myös toinen väite pätee. mot

Seuraus. Jos M on avaruuden V aliavaruus, niin $M \cap M^\perp = \{\underline{0}\}$.

Lause 5.2. $S^\perp = L(S)^\perp$.

Todistus. Triviaalisti $L(S)^\perp \subseteq S^\perp$. Harjoitustehtävänä osoitetaan, että $S^\perp \subseteq L(S)^\perp$. Väite seuraa tästä. mot

Lause 5.2 osoittaa, että aliavaruuden $L(S)$ ortogonaalisen komplementin muodostavat vektorit, jotka ovat kohtisuorassa virittäjävektorien kanssa. Tästä seuraa

Lause 5.3. Olkoon $K = \mathbb{R}$ ja A $m \times n$-matriisi. Tällöin

$$(\text{Row } A)^{\perp} = \text{Nul } A \quad \text{ja} \quad (\text{Col } A)^{\perp} = \text{Nul } A^{\mathrm{T}}.$$

Sisätuloavaruuden äärellisulotteisen aliavaruuden ortogonaaliselle komplementille pätee seuraava tulos.

Lause 5.4. Jos M on sisätuloavaruuden V äärellisulotteinen aliavaruus, niin $V = M \oplus M^{\perp}$ ja $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Todistus. Jos $M = \{\underline{0}\}$, niin $M^{\perp} = V$ ja $V = \{\underline{0}\} \oplus V$. Oletetaan seuraavassa, että $M \neq \{\underline{0}\}$. Olkoon edelleen $\{U_1, \dots, U_p\}$ avaruuden M ortonormaali kanta (Lause 4.3). Jos $X \in V$, merkitään

$$P = (X|U_1)U_1 + \cdots + (X|U_p)U_p \in M, \quad N = X - P$$

(vrt. Gram–Schmidt). Koska $U_i \perp U_j$ aina, kun $i \neq j$, niin jokaisella $j = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned}(N|U_j) &= (X - P|U_j) = (X|U_j) - (P|U_j) = (X|U_j) - (X|U_j)(U_j|U_j) \\ &= (X|U_j) - (X|U_j) = 0.\end{aligned}$$

Siis $N \in M^{\perp}$. Lisäksi Lauseen 5.1. seurauksen nojalla $M \cap M^{\perp} = \{\underline{0}\}$, joten $V = M \oplus M^{\perp}$.

Toisen väitteen todistus jätetään harjoituksiin. mot

Asetetaan nyt

Määritelmä. Olkoon M sisätuloavaruuden V aliavaruus ja $X \in V$. Esityksessä $X = P + N$, missä $P \in M$ ja $N \in M^{\perp}$, vektoria P sanotaan vektorin X *ortogonaaliseksi* eli *kohtisuoraksi projektioksi* aliavaruudelle M ja vektoria N vektoria X vastaavaksi aliavaruuden M *normaaliksi.*

Huomautus. Jos M on äärellisulotteinen ja $\{U_1, \dots, U_p\}$ ortonormaali kanta, niin Lauseen 5.4 todistuksen nojalla ortogonaalinen projektio on

$$P = (X|U_1)U_1 + \cdots + (X|U_p)U_p = \sum_{k=1}^{p} (X|U_k)U_k$$

ja normaali $N = X - P$.

Lause 5.5 (paras approksimaatio). Jos P on vektorin X ortogonaalinen projektio aliavaruudelle M, niin

$$||X - P|| < ||X - U|| \quad \text{aina, kun } U \in M,\ U \neq P.$$

Todistus. Jos $U \in M$, niin $U - P \in M$, joten $(U - P) \perp (X - P)$. Koska $X - U = (X - P) + (P - U)$, niin Pythagoraan lauseen (Lause 3.1) nojalla

$$||X - U||^2 = ||X - P||^2 + ||P - U||^2 > ||X - P||^2,$$

jos $P \neq U$. mot

Esimerkkejä.

VI LINEAARISISTA KUVAUKSISTA

1. Määritelmä ja perusominaisuuksia

Seuraavassa oletetaan, että V ja W ovat K-kertoimisia vektoriavaruuksia.

Määritelmä. Kuvausta $\alpha\colon V \to W$ sanotaan *lineaariseksi*, jos ehdot

LK1 $\quad \alpha(X+Y) = \alpha(X) + \alpha(Y)$ aina, kun $X, Y \in V$,

LK2 $\quad \alpha(cX) = c\alpha(X)$ aina, kun $c \in K$, ja aina, kun $X \in V$,

ovat voimassa.

Kuvausten yhtäsuuruus: Jos $\alpha, \beta\colon V \to W$ ovat lineaarisia kuvauksia, niin

$$\alpha = \beta \quad \text{jos ja vain jos} \quad \alpha(X) = \beta(X) \text{ aina, kun } X \in V.$$

Huomautus. Jos $W = K$, niin lineaarista kuvausta sanotaan myös *lineaariseksi funktionaaliksi.*

Määritelmästä saadaan

Lause 1.1. Jos $\alpha\colon V \to W$ on lineaarinen kuvaus, niin

a) $\alpha(\underline{0}) = \underline{0}$,

b) $\alpha(c_1X_1 + \cdots + c_nX_n) = c_1\alpha(X_1) + \cdots + c_n\alpha(X_n)$ aina, kun $c_i \in K$ ja $X_i \in V$.

Todistus. a) $\alpha(\underline{0}) = \alpha(0 \cdot \underline{0}) \underset{\text{LK2}}{=} 0 \cdot \alpha(\underline{0}) = \underline{0}$.

b) Saadaan määritelmästä induktiolla.

Esimerkkejä.

Olkoon A $m \times n$-matriisi. Määritellään kuvaus $\alpha\colon K^n \to K^m$ asettamalla $\alpha(X) = AX$ aina, kun $X \in K^n$. Saatu kuvaus on lineaarinen, sillä

$$\alpha(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \alpha(X_1) + \alpha(X_2)$$

ja

$$\alpha(cX) = A(cX) = cAX = c\alpha(X).$$

Itse asiassa kaikki lineaariset kuvaukset $\alpha\colon K^n \to K^m$ ovat yllä olevaa tyyppiä.

Lause 1.2. Jos $\alpha\colon K^n \to K^m$ on lineaarinen kuvaus, niin on olemassa yksikäsitteinen $m \times n$-matriisi A, jolle

$$\alpha(X) = AX \quad \text{aina, kun } X \in K^n.$$

Todistus. Käyttämällä avaruuden K^n luonnollista kantaa $E = \{E_1, \dots, E_n\}$ ja kuvauksen α lineaarisuutta saadaan

$$\begin{aligned}\alpha(X) &= \alpha(x_1E_1 + \cdots + x_nE_n) = x_1\alpha(E_1) + \cdots + x_n\ \alpha(E_n)\\ &= (\alpha(E_1)\ \dots\ \alpha(E_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX,\end{aligned}$$

missä matriisin A i:s sarake on $\alpha(E_i)$. Yksikäsitteisyyden todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. mot

Määritelmä. Ylläolevaa matriisia $A = (\alpha(E_1)\ \dots\ \alpha(E_n))$ sanotaan *lineaarisen kuvauksen α matriisiksi luonnollisten kantojen suhteen.*

Huomautus. Yhdistettyä kuvausta vastaa kuvausten matriisien tulo.

Esimerkkejä. Koordinaattikuvaus. Olkoon V vektoriavaruus ja $S = \{U_1, \dots, U_n\}$ sen kanta. Määritellään ns. *koordinaattikuvaus* $\alpha\colon V \to K^n$ yhtälöllä $\alpha(X) = X_S$ (tässä X_S on luvun IV kappaleessa 3 määritelty koordinaattivektori), Siis, jos $X = c_1U_1 + \cdots + c_nU_n$, niin

$$\alpha(X) = X_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Tämä kuvaus on koordinaattivektorin määritelmän jälkeisen Huomautuksen 1) mukaan lineaarinen. Huomautuksessa 2) todettiin, että tapauksessa $V = K^n$ on

$$X = PX_S, \quad \text{missä } P = (U_1, \dots, U_n).$$

Koska $\{U_1, \dots, U_n\}$ on kanta, P on säännöllinen, joten

$$X_S = P^{-1}X.$$

Näin ollen koordinaattikuvauksen matriisi luonnollisten kantojen suhteen on P^{-1}.

2. Ydin ja kuva-avaruus

Olkoon $\alpha\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Jos $S \subseteq V$ ja $T \subseteq W$, niin

$$\text{joukon } S \text{ \textit{kuva} on } \alpha(S) = \{Y \in W | Y = \alpha(X) \text{ eräällä } X \in S\}$$

ja

$$\text{joukon } T \text{ \textit{alkukuva} on } \alpha^{-1}(T) = \{X \in V | \alpha(X) \in T\}.$$

Määritelmä. Lineaarisen kuvauksen $\alpha\colon V \to W$ *kuva-avaruudeksi* sanotaan joukkoa $\alpha(V) = \mathrm{Im}\ \alpha$ ja *ytimeksi* joukkoa

$$\alpha^{-1}(\underline{0}) = \mathrm{Ker}\ \alpha = \{X \in V | \alpha(X) = \underline{0}\}.$$

Esimerkkejä.

Jos $\alpha(X) = AX$ on lineaarinen kuvaus $K^n \to K^m$, niin

$$\mathrm{Ker}\ \alpha = \mathrm{Nul}\ A \quad \text{ja} \quad \alpha(K^n) = \mathrm{Col}\ A.$$

Astelauseesta (luvun IV Lause 4.3) ja luvun IV Lauseesta 5.1 seuraa tällöin, että

$$n = \dim\ \mathrm{Ker}\ \alpha + \dim\ \alpha(K^n). \tag{1}$$

Tätä tulosta yleistetään myöhemmin. Yleisesti Ker α on avaruuden V ja $\alpha(V)$ avaruuden W aliavaruus, kuten seuraava lause osoittaa.

Lause 2.1. Olkoon $\alpha\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus, M avaruuden V aliavaruus ja N avaruuden W aliavaruus. Tällöin $\alpha(M)$ on avaruuden W ja $\alpha^{-1}(N)$ avaruuden V aliavaruus.

Todistus. Todistetaan $\alpha^{-1}(N)$ avaruuden V aliavaruudeksi. Toinen väite osoitetaan vastaavasti.

Olkoot $X_1,\ X_2 \in \alpha^{-1}(N)$, jolloin $\alpha(X_1),\ \alpha(X_2) \in N$. Koska N on aliavaruus, niin $\alpha(X_1 + X_2) = \alpha(X_1) + \alpha(X_2) \in N$. Näin ollen $X_1 + X_2 \in \alpha^{-1}(N)$, joten VA1 pätee. Samoin $\alpha(cX_1) = c\ \alpha(X_1) \in N$, joten $cX_1 \in \alpha^{-1}(N)$ ja VA2 on voimassa. Lisäksi $\alpha(\underline{0}) = \underline{0}$ (Lause 1.1 a), joten myös $\underline{0} \in \alpha^{-1}(N)$. mot

Seuraus. Ydin Ker α on avaruuden V ja kuva $\alpha(V)$ avaruuden W aliavaruus.

Määritelmä. Lineaarista kuvausta $\alpha\colon V \to W$ sanotaan

1) *surjektioksi*, jos $\alpha(V) = W$;
2) *injektioksi* tai *säännölliseksi*, jos yhtälöstä $\alpha(X) = \alpha(Y)$ seuraa, että $X = Y$;
3) *bijektioksi*, jos se on surjektio ja injektio.

Huomautus. Yllä injektion määritelmässä oleva ehto on yhtäpitävä sen kanssa, että epäyhtälöstä $X \neq Y$ seuraa $\alpha(X) \neq \alpha(Y)$.

Lause 2.2. Lineaarinen kuvaus $\alpha\colon V \to W$ on säännöllinen jos ja vain jos Ker $\alpha = \{\underline{0}\}$.

Todistus. Jos Ker $\alpha = \{\underline{0}\}$ ja $\alpha(X) = \alpha(Y)$, niin $\underline{0} = \alpha(X) - \alpha(Y) = \alpha(X - Y)$. Siis $X - Y \in \mathrm{Ker}\ \alpha$, joten $X = Y$ ja α on säännöllinen.

Oletetaan sitten, että α on säännöllinen ja $X \in \mathrm{Ker}\ \alpha$. Tällöin $\alpha(X) = \underline{0} = \alpha(\underline{0})$, joten injektiivisyyden nojalla $X = \underline{0}$. Siis Ker $\alpha = \{\underline{0}\}$. mot

Esimerkkejä.

Säännöllisillä kuvauksilla on seuraava ominaisuus.

Lause 2.3. Jos $\alpha\colon V \to W$ on säännöllinen ja $F \subseteq V$ on avaruuden V kanta, niin $\alpha(F)$ on kuva-avaruuden $\alpha(V)$ kanta.

Todistus. Lauseen 1.1 b)-kohdan nojalla $\alpha(F)$ virittää kuva-avaruuden $\alpha(V)$, joten riittää osoittaa, että joukko $\alpha(F)$ on lineaarinen riippumaton. Jos $\alpha(F_1), \dots, \alpha(F_p) \in \alpha(F)$ ja

$$c_1\alpha(F_1) + \cdots + c_p\alpha(F_p) = \underline{0},$$

niin Lauseen 1.1 b)-kohdan nojalla

$$\alpha(c_1F_1 + \cdots + c_pF_p) = \underline{0}.$$

siis $c_1F_1 + \cdots + c_pF_p \in \text{Ker } \alpha$, joten Lauseen 2.2 nojalla $c_1F_1 + \cdots + c_pF_p = \underline{0}$. Koska F on avaruuden V kantana lineaarisesti riippumaton, on oltava $c_1 = \cdots = c_p = 0$. Tästä seuraa, että $\alpha(F)$ on lineaarisesti riippumaton. mot

Seuraus. Lauseen 2.3 oletuksilla dim $V =$ dim $\alpha(V)$.

Olkoon $S = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ vektoriavaruuden V kanta. Osoitetaan, että koordinaattikuvaus $\alpha\colon V \to K^n$, missä $\alpha(X) = X_S$, on bijektio.

Selvästi $\alpha(V) = K^n$, joten α on surjektio. Jos $X \in \text{Ker } \alpha$, niin $X_S = \underline{0}$. Siis $X = 0 \cdot U_1 + \cdots + 0 \cdot U_n = \underline{0}$, joten Ker $\alpha = \{\underline{0}\}$ ja α on injektio Lauseen 2.2 nojalla. Näin ollen α on bijektio. Koordinaattikuvauksella on siis käänteiskuvaus $\alpha^{-1}\colon K^n \to V$, joka on myös lineaarinen, sillä on voimassa

Lause 2.4. Jos lineaarinen kuvaus $\alpha\colon V \to W$ on bijektio, niin on olemassa käänteiskuvaus $\alpha^{-1}\colon W \to V$, joka on lineaarinen kuvaus.

Todistus. Bijektiolla on käänteiskuvaus, lineaarisuuden todistaminen jätetään harjoituksiin. mot

3. Lineaarisen kuvauksen matriisi

Lauseessa 1.2 osoitettiin, että jokainen lineaarinen kuvaus $\alpha\colon K^n \to K^m$ voidaan esittää muodossa $\alpha(X) = AX$, missä A on $m \times n$-matriisi. Yleistetään nyt tämä tulos.

Olkoot V ja W K-kertoimisia ja äärellisulotteisia vektoriavaruuksia, joiden kannat ovat vastaavasti $F = \{F_1, \dots, F_n\}$ ja $G = \{G_1, \dots, G_m\}$. Olkoon edelleen $\alpha\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Lauseen 1.1 b)-kohdan nojalla vektorit $\alpha(F_1), \dots, \alpha(F_n) \in W$ määräävät yksikäsitteisesti lineaarikuvauksen α. Nämä vektorit voidaan esittää yksikäsitteisesti avaruuden W kannan G avulla muodossa

$$\alpha(F_j) = a_{1j}G_1 + \cdots + a_{mj}G_m, \; j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

missä $a_{ij} \in K$. Siis annettua lineaarista kuvausta $\alpha\colon V \to W$ vastaa yhtälöiden (1) määräämällä tavalla yksikäsitteinen $m \times n$-matriisi $A = (a_{ij})_{m\times n}$, jonka j:s sarake on kantavektorin $\alpha(F_j)$ koordinaattivektori kannan G suhteen. Jos taas kääntäen annetaan $m \times n$-matriisi A, niin sitä vastaa yhtälöiden (1) avulla määräytyvä yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus $\alpha\colon V \to W$.

Määritelmä. Olkoon $F = \{F_1, \dots, F_n\}$ avaruuden V ja $G = \{G_1, \dots, G_m\}$ avaruuden W kanta sekä $\alpha\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Edellä mainittua matriisia $A = (a_{ij})$, jolle $\alpha(F_j) = a_{1j}G_1 + \cdots + a_{mj}G_m$, aina, kun $j = 1, \dots, n$, sanotaan *kuvauksen α matriisiksi kantojen F ja G suhteen.* Tätä merkitään

$$A = M(\alpha) = M(F, G; \alpha).$$

Jos $V = W$ ja $F = G$, niin matriisia A sanotaan kuvauksen α matriisiksi kannan F suhteen ja sitä merkitään

$$A = M(\alpha) = M(F; \alpha).$$

Huomautus. A riippuu kantoja F ja G valinnasta. Kantoja vaihdettaessa myös A vaihtuu.

Esimerkkejä.

Lause 3.1. Olkoon $A = M(F, G; \alpha)$. Tällöin

$$Y = \alpha(X) \quad \text{jos ja vain jos} \quad Y_G = AX_F. \tag{2}$$

Todistus. Olkoot

$$X_F = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ ja } Y_G = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

eli $X = a_1F_1 + \cdots + a_nF_n$ ja $Y = b_1G_1 + \cdots + b_mG_m$. Tällöin

$$\begin{aligned}
Y = \alpha(X) \iff \sum_{i=1}^{m} b_iG_i &= \alpha\Big(\sum_{j=1}^{n} a_jF_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} a_j\alpha(F_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}G_i\Big) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_j\Big)G_i \\
\iff b_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_j,\ i = 1, \dots, m \\
\iff Y_G &= AX_F. \quad \text{mot}
\end{aligned}$$

Nyt voidaan ylestää aikaisempaa kappaleen 2 tulosta (1).

Lause 3.2. Olkoot V ja W äärellisulotteisia vektoriavaruuksia ja $\alpha\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin

$$\dim\ V = \dim\ \mathrm{Ker}\ \alpha + \dim\ \alpha(V).$$

Todistus. Oletetaan, että $\dim V = n$ ja $\dim W = m$. Olkoot edelleen F ja G avaruuksien V ja W kantoja. Lauseen 3.1 mukaan kuvaus $X \underset{\alpha}{\to} Y$ voidaan esittää muodossa

$$X \underset{\gamma_1}{\to} X_F \underset{\hat{\alpha}}{\to} Y_G \underset{\gamma_2^{-1}}{\to} Y,$$

missä $\gamma_1\colon V \to K^n$ ja $\gamma_2\colon W \to K^m$ ovat koordinaattikuvauksia ja $\hat{\alpha}\colon K^n \to K^m$ on kuvaus $Y_G = \hat{\alpha}\ (X_F) = AX_F$. Kappaleen 2 yhtälön (1) nojalla

$$n = \dim\ \mathrm{Ker}\ \hat{\alpha} + \dim\ \hat{\alpha}(K^n).$$

Tässä Ker $\hat{\alpha}$ = Nul A ja $\hat{\alpha}(K^n)$ = Col A. Koska koordinaattikuvaukset ovat bijektioita, saadaan

$$X \in \mathrm{Ker}\ \alpha \iff Y = \underline{0} \iff Y_G = \underline{0} \iff X_F \in \mathrm{Nul}\ A,$$

joten $\gamma_1(\mathrm{Ker}\ \alpha) = \mathrm{Nul}\ A$ ja $\gamma_2^{-1}(\mathrm{Col}\ A) = \alpha(V)$. Lauseen 2.3 nojalla edelleen

$$\dim\ \mathrm{Ker}\ \alpha = \dim\ \mathrm{Nul}\ A = \dim\ \mathrm{Ker}\ \hat{\alpha}$$

ja

$$\dim\ \alpha(V) = \dim\ \mathrm{Col}\ A = \dim\ \hat{\alpha}(K^n).$$

Koska $\dim\ V = n$, saadaan väite. mot

Seuraava lause yhdistää kuvauksen α ja sen matriisin A säännöllisyyden.

Lause 3.3. Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus ja $\alpha\colon V \to \alpha(V)$ lineaarinen kuvaus. Olkoot F ja G vastaavasti avaruuksien V ja $\alpha(V)$ kantoja. Kuvaus α on säännöllinen jos ja vain jos sen matriisi $A = M(F, G; \alpha)$ on säännöllinen. Jos α on säännöllinen, niin käänteiskuvauksen $\alpha^{-1}\colon \alpha(V) \to V$ matriisi on $M(G, F; \alpha^{-1}) = A^{-1}$.

Todistus. 1) Lauseen 2.2 mukaan α on säännöllinen jos ja vain jos Ker $\alpha = \{\underline{0}\}$. Tällöin $\dim V = \dim \alpha(V) = n$ (Lauseen 2.3 seuraus tai Lause 3.2). Siis A on $n \times n$-matriisi. Lisäksi

$$\mathrm{Ker}\ \alpha = \{\underline{0}\} \iff \mathrm{Nul}\ A = \{\underline{0}\} \iff \mathrm{rank}\ A = n \iff A \text{ on säännöllinen}$$

(ks. edellisen lauseen todistus ja luvun IV Lause 4.3).

2) Jos α on säännöllinen, niin on olemassa käänteiskuvaus $\alpha^{-1}\colon \alpha(V) \to V$. Olkoon sen matriisi kantojen G ja F suhteen B, jolloin

$$Y = \alpha(X) \iff X = \alpha^{-1}(Y).$$

Lauseen 3.1 nojalla saadaan nyt

$$Y_G = AX_F \iff X_F = BY_G,$$

joten $Y_G = ABY_G$ aina, kun $Y_G \in K^n$. Tästä seuraa (totea tarkasti!), että $AB = I$ ja $B = A^{-1}$. mot

Seuraus. Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus ja $I: V \to V$ identtinen kuvaus. Jos F ja $\hat{F}$ ovat kaksi avaruuden V kantaa, niin matriisi $P = M(F, \hat{F}; I)$ on säännöllinen ja $P^{-1} = M(\hat{F}, F; I)$.

4. Kannan vaihto, similaarisuus

Määritelmä. Olkoot F ja $\hat{F}$ vektoriavaruuden V kaksi kantaa. Lauseen 3.3 seurauksessa esiintynyttä identiteettikuvauksen matriisia $P = M(F, \hat{F}; I)$ kutsutaan *kannanvaihtomatriisiksi kannasta F kantaan $\hat{F}$.*

Kappaleen 3 mukaan $P = ((F_1)_{\hat{F}} \ \ldots \ (F_n)_{\hat{F}})$, jos $F = \{F_1, \ldots, F_n\}$. Edelleen Lauseen 3.1 mukaan

$$X_{\hat{F}} = PX_F \quad \text{aina, kun} \quad X \in V. \tag{1}$$

Jos $V = K^n, F = \{F_1, \ldots, F_n\}$ ja $\hat{F} = \{\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_n\}$, niin Luvun IV kappaleen 3 mukaan

$$X = P_1 X_F \text{ ja } X = P_2 X_{\hat{F}}, \ P_1 = (F_1 \ldots F_n), \ P_2 = (\hat{F}_1 \ldots \hat{F}_n).$$

Näin ollen

$$X_{\hat{F}} = P_2^{-1} X = P_2^{-1} P_1 \ X_F = PX_F \quad \text{aina, kun } X_F \in K^n.$$

(matriisit P_1 ja P_2 ovat säännöllisiä, koska F ja $\hat{F}$ ovat kantoja.) Edellisen nojalla on

$$P = P_2^{-1} P_1.$$

Esimerkkejä.

Kannanvaihtomatriiseja käyttämällä nähdään, mitä lineaarisen kuvauksen matriisille tapahtuu kantoja vaihdettaessa.

Lause 4.1. Olkoon $\alpha: V \to W$ lineaarinen kuvaus, $A = M(F, G; \alpha)$, $B = M(\hat{F}, \hat{G}; \alpha)$, $P = M(F, \hat{F}; I)$ kannanvaihtomatriisi avaruuden V kannasta F kantaan $\hat{F}$ ja $Q = M(G, \hat{G}; I)$ kannanvaihtomatriisi avaruuden W kannasta G kantaan $\hat{G}$. Tällöin

$$B = QAP^{-1}.$$

Todistus. Lauseen 3.1 mukaan

$$Y_G = AX_F \iff Y = \alpha(X) \iff Y_{\hat{G}} = BX_{\hat{F}}.$$

Edelleen yhtälön (1) mukaan

$$X_{\hat{F}} = PX_F \text{ ja } Y_{\hat{G}} = QY_G.$$

Nyt

$$BX_{\hat{F}} = Y_{\hat{G}} = QY_G = QAX_F = QAP^{-1}X_{\hat{F}} \quad \text{aina, kun } X_{\hat{F}} \in K^n,$$

joten $B = QAP^{-1}$. mot

Seuraus. Olkoon $\alpha\colon V \to V$ lineaarinen kuvaus, $\tilde{F}$ ja $\tilde{G}$ avaruuden V kantoja, $A = M(\tilde{F};\alpha)$, $B = M(\tilde{G};\alpha)$ ja $P = M(\tilde{F},\tilde{G};I)$. Tällöin

$$B = PAP^{-1}.$$

Todistus. Valitaan edellä $F = G = \tilde{F}$ ja $\hat{F} = \hat{G} = \tilde{G}$.

Määritelmä. Lajia $n \times n$ olevia matriiseja A ja B sanotaan *similaarisiksi*, jos on olemassa sellainen säännöllinen matriisi C, että $B = CAC^{-1}$.

Esimerkkejä.

5. Rieszin esityslause

Sisätulolla on seuraava tärkeä sovellus lineaarisiin kuvauksiin. Sen mukaan jokainen lineaarinen funktionaali eli lineaarikuvaus $V \to K$ voidaan esittää sisätulona. Tässä tulos todistetaan vain äärellisulotteisille avaruuksille, mutta vastaava tulos pätee myös tietyt ehdot toteuttavissa ääretönulotteisissa avaruuksissa.

Lause 5.1 (Rieszin esityslause). Olkoon $K = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, V äärellisulotteinen K-kertoiminen sisätuloavaruus ja $f\colon V \to K$ lineaarinen funktionaali. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen vektori $Y \in V$, että

$$f(X) = (X|Y) \quad \text{aina, kun } X \in V. \tag{1}$$

Todistus. Lauseen 3.2 ja luvun IV Lauseen 6.3 seurauksen mukaan $V = \mathrm{Ker}\, f \oplus L(\{X\})$ jokaisella $X \notin \mathrm{Ker} f$ (huomaa, että $\dim K = 1$). Toisaalta luvun V Lauseen 5.4 nojalla $V = \mathrm{Ker}\, f \oplus (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$. Täten $(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp} = L(\{X_0\})$ eräällä $X_0 \in (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$. Osoitetaan, että yhtälö (1) on voimassa, kun $Y = aX_0$, missä $a \in K$ on valittu sopivasti.

Jos $f = \underline{0}$, voidaan valita $Y = \underline{0}$, sillä tällöin $f(X) = \underline{0} = (X|\underline{0}) = (X|Y)$ aina, kun $X \in V$. Oletetaan siis, että $f \neq \underline{0}$. Tällöin $X_0 \neq \underline{0}$. Jotta yhtälö (1) olisi voimassa vektorille $Y = aX_0$, niin täytyy olla

$$f(X_0) = (X_0|aX_0) = \bar{a}(X_0|X_0) = \bar{a}||X_0||^2,$$

mistä saadaan $a = \frac{\overline{f(X_0)}}{||X_0||^2}$. Näin ollen vektorin Y pitäisi olla $Y = \frac{\overline{f(X_0)}}{||X_0||^2} X_0$. Osoitetaan, että tämä Y toteuttaa yhtälön (1) myös vektoreille $X \neq X_0$.

Hajotelman $V = \text{Ker } f \oplus L(\{X_0\})$ mukainen esitys vektorille $X \in V$ on $X = (X - bX_0) + bX_0$, missä $b = \frac{f(X)}{f(X_0)}$ ja $X - bX_0 \in \text{Ker } f$. Tällöin

$$\begin{aligned}(X|Y) &= ((X - bX_0) + bX_0|aX_0) = ((X - bX_0)|aX_0) + (bX_0|aX_0) \\ &= b\bar{a}(X_0|X_0) = b\bar{a}||X_0||^2 = \frac{f(X)}{f(X_0)} \cdot \frac{f(X_0)}{||X_0||^2} \cdot ||X_0||^2 = f(X)\end{aligned}$$

aina, kun $X \in V$. Näin ollen $f(X) = (X|Y)$ aina, kun $X \in V$.

Vektorin Y yksikäsitteisyys seuraa sisätulon määritelmän jälkeisestä huomautuksesta 4): Jos $f(X) = (X|Y) = (X|Y_1)$ aina, kun $X \in V$, niin kyseisen huomautuksen nojalla $Y = Y_1$. mot

Rieszin esityslauseelle saadaan allaoleva seuraus. Olkoot V ja W äärellisulotteisia sisätuloavaruuksia ja olkoon $\alpha: V \to W$ lineaarikuvaus. Asetetaan jokaista $Y \in W$ kohti kuvaus

(2) $$f_Y: V \to K, \ f_Y(X) = (\alpha(X)|Y).$$

Tämä kuvaus on lineaarinen (totea!), joten Rieszin esityslauseen mukaan on olemassa sellainen yksikäsitteinen $Z \in V$, että $f_Y(X) = (X|Z)$ aina, kun $X \in V$. Siis jokaista $Y \in W$ vastaa yksikäsitteinen $Z \in V$, jolle $(\alpha(X)|Y) = (X|Z)$. Tämä antaa kuvauksen, joka kuvaa vektorin $Y \in W$ ylläolevaksi vektoriksi $Z \in V$. Käyetään tälle kuvaukselle merkintää α^*. Siis α^* on kuvaus $\alpha^*: W \to V$, jolle

$$(\alpha(X)|Y) = (X|\alpha^*(Y)).$$

Tässä määriteltyä kuvausta α^* sanotaan kuvauksen α *adjungoiduksi kuvaukseksi*. Myös adjungoitu kuvaus α^* on lineaarinen: Jos $X \in V$ ja Y_1, $Y_2 \in W$, niin

$$\begin{aligned}(X|\alpha^*(Y_1 + Y_2)) &= (\alpha(X)|Y_1 + Y_2) = (\alpha(X)|Y_1) + (\alpha(X)|Y_2) \\ &= (X|\alpha^*(Y_1)) + (X|\alpha^*(Y_2)) = (X|\alpha^*(Y_1) + \alpha^*(Y_2)).\end{aligned}$$

Täten sisätulon määritelmän jälkeisen huomautuksen 4) nojalla $\alpha^*(Y_1 + Y_2) = \alpha^*(Y_1) + \alpha^*(Y_2)$. Näin ollen ehto LK1 on voimassa. Ehdon LK2 saa osoitettua vastaavasti.

Johdetaan seuraavaksi esitys kuvauksen α^* matriisille luonnollisten kantojen suhteen. Olkoot kuvausten α ja α^* matriisit $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ja A^*. Huomaa aluksi, että $\overline{(AX|Y)} = \overline{(X|A^*Y)}$ eli $(Y|AX) = (A^*Y|X)$. Siten $(A^*)^* = A$ (vastaavasti $(\alpha^*)^* = \alpha$). Tämän sekä Luvun V Lauseen 4.2 ja sen jälkeisen huomautuksen nojalla matriisin A^* (i, j)-alkio on

$$(A^*E_j|E_i) = (E_j|AE_i) = \overline{(AE_i|E_j)} = \bar{a}_{ji}.$$

Näin ollen $A^* = \bar{A}^{\mathrm{T}}$. Matriisia A^* kutsutaan myös matriisin A Hermiten liittomatriisiksi. Näitä tarkastellaan lähemmin luvussa IX.

VII DETERMINANTEISTA

1. Neliömatriisin determinaatti

Seuraavassa $M_n(K)$ tarkoittaa $n \times n$-neliömatriisien joukkoa, missä matriisien alkiot kuuluvat kuntaan K. Tarkastellaan joukon $M_n(K)$ alkiota A, ts. $n \times n$-matriisia A. Käytetään merkintää $A(i|j)$ sellaiselle $(n-1) \times (n-1)$-matriisille, joka saadaan poistamalla matriisista A tämän i:s rivi ja j:s sarake. Vastaavasti $A(i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r)$ tarkoittaa sellaista $(n-r) \times (n-r)$-matriisia, joka saadaan matriisista A poistamalla siitä rivit $i_1, \dots, i_r$ ja sarakkeet $j_1, \dots, j_r$. Tällaisia matriiseja sanotaan matriisin A *alimatriiseiksi.*

Määritellään nyt determinanttifunktio $\det\colon M_n(K) \to K$ asettamalla

Määritelmä. Olkoon $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Jos $n = 1$, niin asetetaan

$$\det A = \det(a_{11}) = a_{11}.$$

Jos $n \geq 1$, niin asetetaan

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A(1|j).$$

Matriisin A alimatriisien determinantteja sanotaan matriisin A *alideterminanteiksi.*

Lause 1.1. Olkoon $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

a) Determinantille pätee

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i|j), \;\; i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

b) Jos matriisi B saadaan matriisista A tyyppiä (I) olevalla vaakarivimuunnoksella, niin $\det B = -\det A$.

c) Jos matriisissa A on kaksi samanlaista vaakariviä, niin $\det A = 0$.

d) Jos matriisi C saadaan matriisista A kertomalla matriisi A jokin rivi skalaarilla $e \in K$ (tyyppiä (II) oleva vaakarivimuunnos), niin $\det C = e \det A$.

e) Jos matriisi D saadaan matriisista A tyyppiä (III) olevalla vaakarivimuunnoksella, niin $\det D = \det A$.

Huomautus. Kaava (1) on determinantin $\det A$ kehitelmä i:nnen vaakarivin suhteen. Lukua $(-1)^{i+j} \det A(i|j)$ sanotaan alkiota a_{ij} vastaavaksi *kotekijäksi.*

Lauseen 1.1 todistus. a) Käytetään induktiota. Jos $n = 1$, niin väite seuraa determinantin määritelmästä. Jos $n = 2$, tapaus $i = 1$ seuraa määritelmästä. Tapausessa $i = 2$ saadaan

$$\sum_{j=1}^{2}(-1)^{2+j}a_{2j}\det A(2|j) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = \det A.$$

Kun $n \geq 3$, tehdään induktio-oletus: Yhtälö (1) pätee $m \times m$-matriiseille aina, kun $m \leq n-1$.

Olkoon $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Määritelmän mukaan $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A(1|j)$. Induktio-oletusta voidaan nyt käyttää determinantteihin $\det A(1|j)$ (todistuksen loppuosa luennolla). mot

Huomautus. Lauseen 1.1 avulla determinanttien laskemista voidaan yleensä helpottaa huomattavasti.

Lause 1.2. $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$.

Todistus. Tapaus $n = 1$ on selvä. Tehdään induktio-oletus: Lause pätee $m \times m$-matriiseille, jos $m \leq n-1$. Olkoon $A = (a_{ij})_{n\times n}$, jolloin $B = A^{\mathrm{T}} = (b_{ij})_{n\times n}$, missä $b_{ij} = a_{ji}$.

Lauseen 1.1 a)-kohdan nojalla $\det A^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}\det B(i|j)$, mistä jatketaan luennolla. mot

Koska matriisin A sarakkeet ovat transpoosin A^{T} vaakarivejä, Lauseiden 1.1 ja 1.2 nojalla saadaan

Lause 1.3. Olkoon $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

a) (2) $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A(i|j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

b) Jos B saadaan matriisista A vaihtamalla tämän A kaksi saraketta keskenään, niin $\det B = -\det A$.

c) Jos matriisilla A on kaksi samanlaista saraketta, niin $\det A = 0$.

d) Jos C saadaan matriisista A kertomalla tämän jokin sarake skalaarilla $e \in K$, niin $\det C = e\det A$.

e) Jos $D = (d_{ij})$, missä $d_{ir} = a_{ir} + ea_{is}$, $i = 1, \ldots, n$, ja $d_{ij} = a_{ij}$ aina, kun $j \neq r$, $j = 1, \ldots, n$, niin $\det D = \det A$.

2. Käänteismatriisin määrääminen determinanttien avulla

Määritelmä. Olkoot $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{n\times n}$, missä

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}\det A(j|i),\ i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(Tässä b_{ij} on alkiota a_{ji} vastaava kotekijä.) Matriisia B sanotaan matriisin A *adjungoiduksi matriisiksi* ja sitä merkitään $B = \text{adj } A$.

Lause 2.1. $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I_n$.

Todistus. Olkoon adj $A = B = (b_{ij})$ ja $AB = (c_{ij})$. Jokaiselle $i = 1, \dots, n$ pätee

$$c_{ii} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{ti} = \sum_{t=1}^{n}(-1)^{t+i}a_{it}\det A(i|t) = \det A$$

ja jokaiselle $i \neq j$

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj} = \sum_{t=1}^{n}(-1)^{t+j}a_{it}\det A(j|t) = 0.$$

Tässä jälkimmäisen summan determinantin rivit i ja j ovat kumpikin $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, joten summan arvo on Lauseen 1.1 c)-kohdan nojalla 0. Siis

$$C = (\det A)I_n.$$

Vastaavasti nähdään, että $BA = (\det A)I_n$. mot

Lause 2.2. Matriisi $A_{n\times n}$ on säännöllinen jos ja vain jos $\det A \neq 0$. Jos $\det A \neq 0$, niin

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{ adj } A.$$

Todistus. Olkoon $A \sim C$, missä C on pelkistetyssä porrasmuodossa. Lauseen 1.1 nojalla $\det A = k\ \det C$ jollakin $k \in K,\ k \neq 0$. Lisäksi luvun III Lauseesta 2.2 seuraa, että A on säännöllinen jos ja vain jos $C = I_n$. Siis A on säännöllinen jos ja vain jos $\det A = k \neq 0$. Jälkimmäinen väite seuraa nyt edellisestä lauseesta. mot

Esimerkkejä.

3. Cramerin kaava

Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$AX = B, \tag{1}$$

missä $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $X = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ ja $B = (b_1, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$. Olkoon nyt A_j-matriisi, joka saadaan matriisista A korvaamalla tämän j:s sarake vektorilla B.

Lause 3.1 (Cramerin kaava). Jos $\det A \neq 0$, niin yhtälöryhmällä (1) on yksikäsitteinen ratkaisu

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},\ j = 1, \dots, n.$$

Todistus. Koska $\det A \neq 0$, niin Lauseen 2.2 nojalla

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ adj } A.$$

Tästä seuraa, että

$$AX = B \iff X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)B.$$

Väite saadaan nyt laskemalla tästä x_j. mot

Esimerkkejä.

4. Vektoritulo avaruudessa $\mathbb{R}^{(3)}$

Olkoot $X = (x_1, x_2, x_3)$ ja $Y = (y_1, y_2, y_3)$ avaruuden $\mathbb{R}^{(3)}$ vektoreita. Aikaisemmin on määritelty vektorien X ja Y sisätulo $(X|Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, jota sanotaan myös skalaarituloksi ja merkitään $X \cdot Y$. Edelleen todettiin, että $X \cdot Y = ||X||||Y|| \cos\theta$, missä θ on vektorien X ja Y välinen kulma. Määritellään nyt vektoritulo $X \times Y$.

Määritelmä. Avaruuden $\mathbb{R}^{(3)}$ vektorien $X = (x_1, x_2, x_3)$ ja $Y = (y_1, y_2, y_3)$ välinen vektoritulo $X \times Y$ määritellään asettamalla

$$\begin{aligned} X \times Y &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)E_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)E_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)E_3, \end{aligned}$$

missä $E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0)$ ja $E_3 = (0, 0, 1)$ ovat luonnolisen kannan alkiot. Usein merkitään myös $E_1 = \bar{i}, E_2 = \bar{j}, E_3 = \bar{k}$.

Muistisääntönä voi käyttää sitä, että tulo $X \times Y$ saadaan, kun "determinantti"

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

kehitetään ensimmäisen vaakarivin mukaan.

Huomautus. Jos $Z = (z_1, z_2, z_3)$, niin

$$X \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Tämän ja Lauseen 1.1 c)-kohdan nojalla $X \perp (X \times Y)$ ja $Y \perp (X \times Y)$, joten $X \times Y$ antaa vektorien X ja Y suuntaisen tason normaalin suunnan.

Lause 4.1. $||X \times Y|| = ||X||||Y|||\sin\theta|$, missä θ on vektorien X ja Y välinen kulma.

Seuraus. Vektroeiden X ja Y määräämän suunnikkaan pinta-ala on $||X \times Y||$.

Lause 4.2. Lineaarisesti riippumattomien vektorien X, Y ja Z määräämän suuntaissärmiön tilavuus on $|X \cdot (Y \times Z)|$.

5. Matriisien tulon determinantti

Määritelmä. *Elementaarimatriisiksi* kutsutaa matriisia, joka saadaan (yhdellä) elementaarisella vaakarivimuunnoksella yksikkömatriisista I_n.

Lause 5.1. Jos B saadaan matriisista A elementaarisella vaakarivimuunnoksella, niin $B = EA$, missä E on elementaarimatriisi, joka saadaan yksikkömatriisista I_n samalla elementaarimuunnoksella.

Todistus. Väite seuraa matriisien kertolaskun määritelmästä, kuten seuraava 3×3 matriisin tarkastelu havainnollistaa. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tyyppi (I): vaihdetaan rivit 1 ja 3 keskenään:

$$I_3 \mapsto E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad EA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tyyppi (II): kerrotaan rivi 2 skalaarilla $c \neq 0$:

$$I_3 \mapsto E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad EA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2c & c & c \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tyyppi (III): lisätään rivi 2 luvulla c kerrottuna kolmanteen riviin:

$$I_3 \mapsto E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}; \qquad EA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3+2c & 1+c & 4+c \end{pmatrix}.$$

Elementaarimatriiseja on siis kolmea tyyppiä:

I) Rivien r ja s vaihto: $I_n \to E$ missä, $EE = I_n$, joten $E^{-1} = E$. Lauseen 1.1 b)-kohdan nojalla $\det E = -1$.

II) Kerrotaan rivi r vakiolla $c \neq 0$:

$$I_n \to E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & c & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{merk.} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & c^{-1} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyt $FE = I_n$, joten $E^{-1} = F$ ja $\det E = c$.

III) Lisätään rivi s luvulla c kerrottuna riviin r: $I_n \to E$. Lisätään $(-c)\cdot$(rivi s.) riviin r. $I_n \to F$. $FE = I_n$, joten $E^{-1} = F$. Edelleen tässä tapauksessa $\det E = \det I_n = 1$.

Jos nyt $A \sim B$, niin Lauseen 5.1 nojalla on olemassa sellaiset elementaarimatriisit $E_1, \ldots, E_k$, että $B = E_1 \ldots E_k A$.

Lause 5.2. Jos A ja B ovat n-rivisiä neliömatriiseja, niin $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Todistus. 1) Jos A on singulaarinen, niin Lauseen 2.2 nojalla $\det A = 0$. Edelleen $A \sim C$, missä matriisi C on pelkistetyssä porrasmuodossa ja sen alin rivi on nollarivi. Lauseen 5.1 nojalla $A = E_1 \ldots E_k C$ missä $E_1, \ldots, E_k$ ovat elementaarimatriiseja. Nyt $AB = E_1 \cdots E_k CB$, joten $AB \sim CB$. Tässä matriisin CB alin rivi on nollarivi, joten rank $(AB) < n$ ja AB on singulaarinen. Lauseen 2.2 nojalla $\det(AB) = 0$, joten väite pätee.

2) Oletetaan nyt, että A on säännöllinen, jolloin $A \sim I_n$ (luvun III Lause 2.2). Nyt $A = E_1 \cdots E_l I_n = E_1 \cdots E_l$, missä $E_1, \ldots, E_l$ ovat elementaarimatriiseja, joten

$$AB = (E_1 \cdots E_l)B.$$

Tehdään induktiotodistus tekiöiden lukumäärän l suhteen.

Olkoon ensin $l = 1$. Jos matriisi E_1 on tyyppiä I, niin Lauseen 1.1 b)-kohdan mukaan $\det(E_1 B) = -\det B = (\det E_1)(\det B)$. Jos E_1 on tyyppiä II, niin Lauseen 1.1 d)-kohdan nojalla $\det(E_1 B) = c\ \det B = (\det E_1)(\det B)$. Lopuksi tyypin III tapauksessa Lauseen 1.1 e)-kohta antaa tuloksen $\det(E_1 B) = \det B = (\det E_1)(\det B)$. Perusaskel on näin tehty.

Tehdään sitten induktio-oletus: Väite on oikea, kun $l = k$, ts. $\det(E_1 \cdots E_k B) = (\det(E_1 \cdots E_k))(\det B)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \det(E_1 \cdots E_k E_{k+1} B) &\underset{l=1}{=} (\det E_1) \det(E_2 \cdots E_k E_{k+1} B) \\ &\underset{\text{Ind.ol.}}{=} (\det E_1)(\det(E_2 \cdots E_k E_{k+1}))(\det B) \underset{l=1}{=} (\det(E_1 \cdots E_k E_{k+1}))(\det B). \end{aligned}$$

Näin ollen induktioaskel on voimassa, ja väite seuraa induktioperiaatteesta. mot

Seuraus 1. Jos A on säännöllinen, niin $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Seuraus 2. Jos A ja B ovat similaarisia, niin $\det A = \det B$.

Todistukset. Jos matriisi A on säännöllinen, niin $\det A \neq 0$ ja $AA^{-1} = I$, joten Lauseen 5.2 nojalla $(\det A)(\det A^{-1}) = \det I = 1$. Seuraus 1 saadaan tästä.

Jos matriisi A ja B ovat similaarisia, niin $A = CBC^{-1}$. Lauseen 5.2 mukaan $\det A = (\det C)(\det BC^{-1}) = (\det C)(\det B)(\det C^{-1})$. Seurauksesta 1 saadaan nyt $\det A = \det B$. mot

VIII OMINAISARVOT JA OMINAISVEKTORIT

1. Lineaarisen kuvauksen ominaisarvot ja ominaisvektorit

Oletetaan seuraavassa, että V on K-kertoiminen vektoriavaruus ja $\alpha\colon V \to V$ on lineaarinen kuvaus.

Määritelmä. Lukua $\lambda \in K$ sanotaan lineaarisen kuvauksen $\alpha\colon V \to V$ *ominaisarvoksi*, jos $\alpha(X) = \lambda X$, jollakin vektorilla $X \neq \underline{0}$. Vektoria X sanotaan tällöin ominaisarvoa λ vastaavaksi *ominaisvektoriksi.*

Lause 1.1. Luku λ on lineaarisen kuvauksen $\alpha\colon V \to V$ ominaisarvo jos ja vain jos $\mathrm{Ker}\ (\alpha - \lambda I) \neq \{\underline{0}\}$, missä $I\colon V \to V$ on identiteettikuvaus.

Todistus. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}\alpha(X) = \lambda X \iff \alpha(X) = \lambda I(X) &\iff (\alpha - \lambda I)X = \underline{0}\\ &\iff X \in \mathrm{Ker}\ (\alpha - \lambda I). \qquad \text{mot}\end{aligned}$$

Määritelmä. Jos λ on kuvauksen α ominaisarvo, niin avaruuden V aliavaruutta $\mathrm{Ker}\ (\alpha - \lambda I)$ sanotaan ominaisarvoa λ vastaavaksi *ominaisavaruudeksi* ja sen dimensiota $\dim\ \mathrm{Ker}\ (\alpha - \lambda I)$ ominaisarvon λ *geometriseksi kertalukuksi.*

Esimerkkejä.

Huomautus. Ominaisarvoja ei aina ole.

Lause 1.2. Lineaarinen kuvaus α on säännöllinen jos ja vain jos 0 ei ole sen ominaisarvo.

Todistus. Luvun VI Lauseen 2.2 mukaan

$$\begin{aligned}\alpha \text{ on säännöllinen} \iff \mathrm{Ker}\ \alpha = \{\underline{0}\} &\iff \mathrm{Ker}\ (\alpha - 0I) = \{\underline{0}\}\\ &\iff 0 \text{ ei ole ominaisarvo (Lause 1.1).} \quad \text{mot}\end{aligned}$$

Lause 1.3. Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ovat lineaarisen kuvauksen α *erisuuria* ominaisarvoja, niin niitä vastaavat ominaisvektorit $X_1, \dots, X_k$ ovat lineaarisesti riippumattomat.

Seuraus. Jos $\dim\ V = n$, niin kuvauksella α on korkeintaan n erisuurta ominaisarvoa.

Lauseen 1.3 todistus. Käytetään induktiota lukumäärän k suhteen. Koska $X_1 \neq 0$, väite pätee, jos $k = 1$. Tehdään induktio-oletus: Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ ovat kuvauksen α erisuuria ominaisarvoja, niin $X_1, \dots, X_l$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Olkoot nyt $\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda_{l+1}$ kuvauksen α erisuuria ominasarvoja ja $X_1, \dots, X_l, X_{l+1}$ vastaavat ominaisvektorit. Jos

$$c_1X_1 + \cdots + c_lX_l + c_{l+1}X_{l+1} = \underline{0},$$

niin

$$c_1\lambda_{l+1}X_1 + \cdots + c_l\lambda_{l+1}X_l + c_{l+1}\lambda_{l+1}X_{l+1} = \underline{0}, \tag{1}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}\underline{0} = \alpha(\underline{0}) &= \alpha(c_1X_1 + \cdots + c_lX_l + c_{l+1}X_{l+1}) \\ &= c_1\alpha(X_1) + \cdots + c_l\alpha(X_l) + c_{l+1}\alpha(X_{l+1}).\end{aligned}$$

Koska $\alpha(X_i) = \lambda_i X_i$, niin saadaan yhtälö

$$c_1\lambda_1X_1 + \cdots + c_l\lambda_lX_l + c_{l+1}\lambda_{l+1}X_{l+1} = \underline{0}.$$

Vähentämällä tästä yhtälö (1) päästään tulokseen

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{l+1})X_1 + \cdots + c_l(\lambda_l - \lambda_{l+1})X_l = \underline{0}.$$

Induktio-oletuksen nojalla on oltava $c_i(\lambda_i - \lambda_{l+1}) = 0$ aina, kun $i = 1, \ldots, l$. Koska $\lambda_i - \lambda_{l+1} \neq 0$, on $c_1 = \ldots = c_l = 0$. Siis $c_{l+1}X_{l+1} = \underline{0}$, joten myös $c_{l+1} = 0$ ($X_{l+1} \neq \underline{0}$). Tästä seuraa, että joukko $\{X_1, \ldots, X_l, X_{l+1}\}$ on lineaarisesti riippumaton, joten väite pätee arvolla $k = l + 1$. Tämä todistaa väitteen. mot

2. Matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit

Määritelmä. Lukua $\lambda \in K$ sanotaan $n \times n$-matriisin A *ominaisarvoksi*, jos on olemassa sellainen $X \in K^n$, että $AX = \lambda X$, $X \neq \underline{0}$. Vektoria X sanotaan tällöin ominaisarvoa λ vastaavaksi matriisin A *ominaisvektoriksi*.

Määritelmä. Olkoon $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in K$, $n \times n$-matriisi. Polynomia

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

sanotaan matriisin A *karakteristiseksi polynomiksi*.

Lause 2.1. Luku $\lambda \in K$ on matriisin A ominaisarvo jos ja vain jos $p(\lambda) = 0$.

Seuraus. Jokaisella matriisilla $A \in M_n(\mathbb{C})$ on ainakin yksi ja korkeintaan n eri ominaisarvoa, sillä polynomin $p(\lambda)$ aste on n ja algebran peruslauseen nojalla n:nnen asteen polynomilla on kertaluvut mukaanlukien n nollakohtaa.

Lauseen 2.1 todistus. Luku λ on matriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos yhtälöllä $AX = \lambda X$ eli yhtälöllä $(A - \lambda I)X = \underline{0}$ on ratkaisu $X \neq \underline{0}$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että rank $(A - \lambda I) < n$ eli $A - \lambda I$ on singulaarinen. Luvun VII Lauseen 2.2 mukaan tämä pätee jos ja vain jos $\det(A - \lambda I) = p(\lambda) = 0$. mot

Olkoon nyt V K-kertoiminen vektoriavaruus, ja olkoon sen dimensio $\dim V = n$. Olkoon edelleen $F = \{U_1, \ldots, U_n\}$ jokin avaruuden V kanta. Jos $\alpha\colon V \to V$ on lineaarinen kuvaus, niin sitä vastaa matriisi $A = M(F; \alpha)$. Seuraava lause antaa yhteyden kuvauksen α ja matriisin A ominaisarvojen ja ominaisvektorien välille.

Lause 2.2. Kuvauksen α ja matriisin A ominaisarvot ovat samat. Edelleen $X = x_1U_1 + \cdots + x_nU_n$ on kuvauksen α ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori jos ja vain jos $X_F = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ on matriisin A samaa ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.

Todistus. Luvun VI Lauseen 3.1 nojalla $Y = \alpha(X)$ jos ja vain jos $Y_F = AX_F$. Siis $\alpha(X) = \lambda X$ jos ja vain jos $AX_F = \lambda X_F$. mot

Jos kantaa F vaihdetaan, muuttuu kuvauksen matriisi A-matriisiksi B, joka on similaarinen matriisin A kanssa, ts. on olemassa sellainen säännöllinen matriisi P, että $B = PAP^{-1}$ (luvun VI Lauseen 4.1 seuraus). Seuraava lause on tästä johtuen luonnollinen.

Lause 2.3. Similaarisilla matriiseilla on samat ominaisarvot.

Todistus. Olkoot matriisit A ja B similaarisia, ja olkoon $B = PAP^{-1}$ jollakin säännöllisellä matriisilla P. Tällöin

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I) &= \det(PAP^{-1} - \lambda I) = \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) \\ &= (\det P)(\det(A - \lambda I)(\det P^{-1}) = \det(A - \lambda I),\end{aligned}$$

missä käytettiin luvun VII Lausetta 5.2 ja sen Seurausta 1. mot

Lineaarisen kuvauksen ominaisarvot saadaan usein parhaiten selville tarkastelemalla kuvauksen matriisin ominaisarvoja. Näin tehtävänä on determinantin $\det(A - \lambda I)$ nollakohtien λ määrääminen, jonka jälkeen ominaisvektorit saadaan ratkaisemalla lineaarisia homogeenisia yhtälöryhmiä. Jos A on diagonaalimatriisi eli muotoa

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

niin tehtävä on erityisen helppo, koska tällöin ominaisarvot ovat suoraan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Olisi siis toivottavaa löytää avaruudelle V kanta, joka antaisi kuvauksen matriisiksi diagonaalimatriisin. Koska eri kantoja vastaavat matriisit ovat similaarisia, on luontevaa selvittää sitä, milloin matriisi on similaarinen diagonaalimatriisin kanssa.

Määritelmä. Matriisia A sanotaan *diagonalisoituvaksi*, jos se on similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa.

Lause 2.4 Matriisi $A_{n\times n}$ on diagonalisoituva jos ja vain jos sillä on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Todistus. Oletetaan, että matriisilla A on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria $X_1, \dots, X_n$, jolloin $AX_i = \lambda_i X_i$ aina, kun $i = 1, \dots, n$ (tässä λ_i on ominaisvektoria X_i vastaava ominaisarvo). Jos merkitään $C = (X_1 \ \dots \ X_n)$ ja $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, niin

$$AC = (AX_1 \ \dots \ AX_n) = (\lambda_1 X_1 \ \dots \ \lambda_n X_n) = CD.$$

Vektorien X_i lineaarisesta riippumattomuudesta seuraa matriisin C säännöllisyys, joten C^{-1} on olemassa. Kertomalla edellinen yhtälö vasemmalta käänteismatriisilla C^{-1}, saadaan $C^{-1}AC = D$, joten A on diagonalisoituva.

Oletetaan nyt, että A on diagonalisoituva. Tällöin on olemassa sellainen säännöllinen matriisi $C = (C_1 \dots C_n)$, että $C^{-1}AC = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Tästä seuraa, että

$$AC = CD \iff (AC_1 \dots AC_n) = (\lambda_1 C_1 \dots \lambda_n C_n),$$

joten $AC_i = \lambda_i C_i$ aina, kun $i = 1, \dots, n$. Näin ollen vektorit $C_1, \dots, C_n$ ovat matriisin A lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita. mot

Huomautus. Ylläolevn todistuksen nojalla pätee: Jos matriisin $C_{n \times n}$ pystyvektorit ovat matriisin A ominaisvektoreita ja $\det C \neq 0$, niin

$$C^{-1}AC = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Lause 2.5 Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, missä $k \leq n$, ovat matriisin A erisuuria ominaisarvoja, niin niitä vastaavat ominaisvektorit $X_1, X_2, \dots, X_k$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todistus. Väite seuraa suoraan Lauseesta 1.3 valitsemalla $\alpha(X) = AX$.

Seuraus. Jos matriisilla $A_{n \times n}$ on n erisuurta ominaisarvoa, niin A on diagonalisoituva.

Todistus. Väite seuraa suoraan Lauseista 2.4 ja 2.5.

Esimerkkejä.

IX HERMITEN MATRIISIT JA MUODOT

1. Hermiten matriisi

Tässä pykälässä tarkastellaan erästä keskeistä matriisiluokkaa, ns. Hermiten matriiseja. Reaaliset Hermiten matriisit ovat *symmetrisiä*. Symmetria on yleistä monissa fysikaalisissa ilmiöissä, joten Hermiten matriiseilla ja niihin liittyvillä lineaarisilla kuvauksilla on paljon sovellutuksia.

Määritelmä. Kompleksisen $m \times n$-matriisin $A = (a_{ij})$ *Hermiten liittomatriisiksi* sanotaan matriisia

$$A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}} = (\overline{a_{ij}})^{\mathrm{T}}.$$

Matriisia $H \in M_n(\mathbb{C})$ sanotaan *Hermiten matriisiksi*, jos $H^* = H$. Reaalista Hermiten matriisia, ts. matriisia $S \in M_n(\mathbb{R})$, jolle $S^{\mathrm{T}} = S$, sanotaan *symmetriseksi.*

Esimerkkejä.

Lause 1.1. Olkoot $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ Hermiten matriiseja. Tällöin

a) $A + B$ on Hermiten matriisi,

b) AB on Hermiten matriisi jos ja vain jos A ja B kommutoivat (ts. $AB = BA$).

Todistus. a) Selvä.

b) Jos $A^* = A$ ja $B^* = B$, niin

$$(AB)^* = (\overline{AB})^{\mathrm{T}} = (\overline{A}\,\overline{B})^{\mathrm{T}} = \overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}} = B^*A^* = BA.$$

Siis

$$(AB)^* = AB \iff AB = BA. \quad \text{mot}$$

Lause 1.2. Hermiten matriisin ominaisarvot ovat reaalisia. Edelleen Hermiten matriisin erisuuria ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaalisia.

Todistus. Olkoon $H_{n\times n}$ Hermiten matriisi ja $X \in \mathbb{C}^n$. Jos $\mathcal{H} = X^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\overline{X}$, niin

$$\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{T}} = (\overline{X}^{\mathrm{T}}\overline{H}^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}}(H^*)^{\mathrm{T}}\overline{X} = X^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\overline{X} = \mathcal{H},$$

joten $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$. mot

Jos λ on Hermiten matriisin H ominaisarvo, niin $\det(H - \lambda I) = \det(H - \lambda I)^{\mathrm{T}} = \det(H^{\mathrm{T}} - \lambda I)$. Siten λ on myös transpoosin H^{T} ominaisarvo, olkoon $H^{\mathrm{T}}X_1 = \lambda X_1$ jollakin $X_1 \neq \underline{0}$. Tällöin

$$\overline{X}_1^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}X_1 = \overline{X}_1^{\mathrm{T}}\lambda X_1 = \lambda||X_1||^2,$$

missä $||X_1|| > 0$ (käytetään avaruuden $\mathbb{C}^n$ tavallista sisätuloa). Todistuksen alkuosan nojalla $\overline{X_1}^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} X_1 \in \mathbb{R}$ (valitaan $X = \overline{X_1}$), joten

$$\lambda = \frac{\overline{X_1}^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} X_1}{||X_1||^2} \in \mathbb{R}.$$

Olkoot seuraavassa λ_1 ja $\lambda_2 \neq \lambda_1$ matriisin H ominaisarvoja ja X_1 ja X_2 vastaavia ominaisvektoreita. Tällöin

$$\begin{aligned} \lambda_1(X_1|X_2) &= (\lambda_1 X_1|X_2) = (HX_1|X_2) = (HX_1)^{\mathrm{T}}\overline{X_2} = X_1^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} \overline{X_2} \\ &= X_1^{\mathrm{T}}(\overline{HX_2}) = X_1^{\mathrm{T}}(\overline{\lambda_2 X_2}) = \overline{\lambda_2} X_1^{\mathrm{T}} \overline{X_2} = \lambda_2(X_1|X_2), \end{aligned}$$

sillä $\lambda_2 = \overline{\lambda_2}$ alkuosan perusteella. Koska $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on oltava $(X_1|X_2) = 0$ eli $X_1 \perp X_2$.
mot

Erikoistapauksena Lauseesta 1.2 saadaan seuraava ortogonaalisuustulos.

Seuraus. Symmetrisen matriisin erisuuria ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaalisia.

Määritelmä. Matriisia $U \in M_n(\mathbb{C})$ sanotaan *unitaariseksi*, jos $U^* = U^{-1}$, ts. $U^*U = UU^* = I_n$. Reaalista unitaarista matriisia sanotaan ortogonaaliseksi. Siis $P \in M_n(\mathbb{R})$ on ortogonaalinen, jos $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$.

Lause 1.3. a) Vektori U on unitaarinen jos ja vain jos sen vaakavektorit (ja pystyvektorit) muodostavat ortonormaalin joukon (avaruuden $\mathbb{C}^n$ tavallisen sisätulon suhteen).

b) Jos A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ ovat unitaarisia, niin myös AB on unitaarinen.

c) Unitaarisen matriisin käänteismatriisi on unitaarinen.

d) Unitaarisen matriisin ominaisarvoille λ pätee ehto $|\lambda|$=1.

Huomautus. Seuraavasta todistuksesta käy ilmi, että ylläolevassa unitaarinen voidaan korvata ortogonaalisella, kun samalla avaruus $\mathbb{C}^n$ korvataan avaruudella $\mathbb{R}^n$.

Todistus. a) Merkitään $U = (U_1 U_2 \ \ldots \ U_n)$ sekä $\delta_{ij} = 1$, jos $i = j$, ja $\delta_{ij} = 0$, jos $i \neq j$. Koska

$$(\delta_{ij})_{n\times n} = I = U^*U = (\overline{U_i}^{\mathrm{T}} U_j)_{n\times n} = (\overline{(U_i|U_j)})_{n\times n}$$

ja $\delta_{ij} \in \mathbb{R}$, niin $(U_i|U_j) = \delta_{ij}$. Tästä seuraa a)-kohdan väite sarakkeille. Vaakavektoreille väite seuraa vastaavasti yhtälöstä $UU^* = I$.

Muut kohdat jätetään harjoituksiin. mot

Seuraava lause on tämän kurssin tärkeimpiä tuloksia.

Lause 1.4. Hermiten matriisi H on unitaarisesti diagonalisoituva eli on olemassa sellainen unitaarinen matriisi U, että U^*HU on diagonaalimatriisi.

Todistus. Olkoon H $n \times n$-kokoinen Hermiten matriisi. Käytetään todistuksessa induktiota rivien lukumäärän n suhteen. Tapaus $n = 1$ on selvä: valitaan $U = (1)$.

Tehdään induktio-oletus: Lause pätee kaikille $(n-1)$-rivisille Hermiten matriiseille.

Lauseen 1.2 mukaan matriisilla H on ominaisarvo $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Olkoon V_1 ominaisarvoa λ_1 vastaava ominaisvektori (jos $H \in M_n(\mathbb{R})$, voidaan itse asiassa valita $V_1 \in \mathbb{R}^n$). Olkoot edelleen $V_2, \ldots, V_n$ avaruuden $\mathbb{C}^n$ sellaisia vektoreita, että $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ on lineaarisesti riippumaton. Konstruoidaan nyt Gramin–Schmidtin menetelmällä näistä vektoreista lähtien avaruuden $\mathbb{C}^{(n)}$ ortonormeerattu kanta $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$. Erityisesti $U_1 = V_1/||V_1||$, joten

$$HU_1 = \frac{1}{||V_1||} HV_1 = \frac{1}{||V_1||}\lambda_1 V_1 = \lambda_1 U_1.$$

Siten vektori U_1 on ominaisarvoa λ_1 vastaava ominaisvektori. Olkoon $R = R_{n\times n} = (U_1\ U_2 \ldots U_n)$. Matriisin R^*HR ensimmäinen pystyvektori on

$$R^*HU_1 = R^*\lambda_1 U_1 = \lambda_1 R^* U_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} \overline{U_1}^{\mathrm{T}} \\ \overline{U_2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \overline{U_n}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} U_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} \overline{U_1}^{\mathrm{T}} U_1 \\ \overline{U_2}^{\mathrm{T}} U_1 \\ \vdots \\ \overline{U_n}^{\mathrm{T}} U_1 \end{pmatrix}.$$

Tässä $\overline{U_i}^{\mathrm{T}} U_1 = (U_1|U_i) = \delta_{1i}$, joten matriisin R^*HR ensimmäinen pystyvektori on $(\lambda_1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$. Koska $(R^*HR)^* = R^*H^*(R^*)^* = R^*HR$, niin R^*HR on Hermiten matriisi ja sen ensimmäinen vaakarivi on $(\lambda_1, 0, \ldots, 0)$, missä $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Siis

$$R^*HR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

missä H_1 on $(n-1)$-rivinen Hermiten matriisi, koska R^*HR on Hermiten matriisi. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa unitaarinen matriisi $T_1 = T_{1_{(n-1)\times(n-1)}}$, jolle $T_1^* H_1 T_1$ on diagonaalimatriisi. Merkitään

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

ja osoitetaan luennolla, että $U = RT$ toteuttaa vaaditut ehdot. mot

Luvun VIII Lauseen 2.4 todistuksesta seuraa, että Lauseen 1.4 matriisin U sarakkeet ovat matriisin H ominaisvektoreita. Lauseen 1.3 kohdasta a) saadaan

Lause 1.5. Hermiten matriisilla $H_{n\times n}$ on n ominaisvektoria, ja ne muodostavat ortonormaalin joukon.

Edelleen Lauseesta 3.4 saadaan reaalitapauksessa

Lause 1.6. Jos S on symmetrinen matriisi, niin on olemassa sellainen ortogonaalinen matriisi P, että $P^{\mathrm{T}}SP$ on diagonaalimatriisi. Matriisin P sarakkeet ovat matriisin S ortormeerattuja ominaisvektoreita.

Esimerkkejä.

2. Hermiten muodot ja neliömuodot

Käytetään aikaisempaan tapaan avaruuden $\mathbb{C}^n$ vektorien X ja Y sisätulolle merkintää $(X|Y)$.

Lause 2.1. $(AX|X) = (X|A^*X)$ aina, kun $A \in M_n(\mathbb{C})$ ja $X \in \mathbb{C}^n$.

Todistus. Väite seuraa yhtälöketjusta

$$\begin{aligned}(AX|X) &= (AX)^{\mathrm{T}}\overline{X} = X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\overline{X} = X^{\mathrm{T}}\overline{A}^*\overline{X} = X^{\mathrm{T}}(\overline{A^*X}) \\ &= (X|A^*X). \qquad \text{mot}\end{aligned}$$

Määritelmä. Lauseketta $H(X) = (HX|X)$, missä H on Hermiten matriisi ja $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, sanotaan *Hermiten muodoksi.*

Lause 2.2. $H(X) \in \mathbb{R}$ aina, kun $X \in \mathbb{C}^n$.

Todistus. Väite seuraa Lauseen 1.2 todistuksesta, missä lauseke $H(X) = (HX|X) = (HX)^{\mathrm{T}}\overline{X} = X^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\overline{X}$ osoitettiin reaaliseksi. mot

Jos edellä $H = S = (s_{ij})_{n\times n}$ on symmetrinen matriisi ja $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, niin saadaan erikoistapauksena yllä olevasta *neliömuoto*

$$\begin{aligned}Q(X) &= (SX|X) = (X|S^*X) = (X|SX) \\ &= X^{\mathrm{T}}SX = (x_1, \ldots, x_n)\Big(\sum_{j=1}^{n} s_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} s_{nj}x_j\Big)^{\mathrm{T}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{kj}x_kx_j.\end{aligned}$$

Jokainen neliömuoto

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_kx_j$$

voidaan esittää edellä olevalla tavalla valitsemalla $S = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$, jolloin S on symmetrinen ja

$$Q(X) = (SX|X).$$

Lauseen 1.4 avulla Hermiten muotojen tarkastelua voidaan oleellisesti helpottaa. Kyseisen lauseen mukaan on olemassa sellainen unitaarinen matriisi U, että $U^*HU = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, missä luvut λ_i ovat Hermiten matriiisn H ominaisarvoja. Lauseen 1.2 perusteella nämä ominaisarvot ovat reaalisia, joten D on reaalinen diagonaalimatriisi. Näitä tuloksia käyttämällä jokainen Hermiten muoto voidaan diagonalisoida eli *saattaa pääakselimuotoon.*

Lause 2.3. Olkoon $H(X) = (HX|X)$ Hermiten muoto ja olkoon U sellainen unitaarinen matriisi, että $U^*HU = D$. Jos $X' = (x_1', \ldots, x_n')^{\mathrm{T}} = U^*X$ (ts. $X = UX'$), niin

$$H(X) = (DX'|X') = \lambda_1 |x_1'|^2 + \ldots + \lambda_n |x_n'|^2.$$

Todistus. Kun $X = UX'$, niin

$$\begin{aligned}
H(X) &= (HX|X) = X^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} \overline{X} = (UX')^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} (\overline{UX'}) \\
&= X'^{\mathrm{T}} (U^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} \overline{U}) \overline{X'} = X'^{\mathrm{T}} (U^* H U)^{\mathrm{T}} \overline{X'} = X'^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} \overline{X'} \\
&= (DX')^{\mathrm{T}} \overline{X'} = (DX'|X') = \lambda_1 |x_1'|^2 + \cdots + \lambda_n |x_n'|^2. \quad \text{mot}
\end{aligned}$$

Huomautus. Jos edellä $U = (U_1 \ \ldots \ U_n)$, niin Lauseen 1.3 kohdan a) mukaan $\{U_1, \ldots, U_n\}$ on avaruuden $\mathbb{C}^n$ ortonormaali kanta. Edelleen

$$X = UX' = x_1' U_1 + \cdots + x_n' U_n,$$

joten X' on vektorin X koordinaattivektori tämän kannan suhteen. Diagonalisointi saadaan siis tehtyä kannan vaihdolla siirtymällä luonnollisesta kannasta toiseen ortonormaaliin kantaan $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Vektorit $U_1, \ldots, U_n$ antavat Hermiten muodon pääakselien suunnat.

Reaalisessa tapauksessa Lauseesta 2.3 saadaan seuraava tulos.

Lause 2.4. Jos S on symmetrinen matriisi ja $Q(X) = (SX|X)$ sen määräämä neliömuoto, niin on olemassa sellainen ortogonaalinen matriisi P, että $P^{\mathrm{T}}SP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ja

$$Q(X) = \lambda_1 \ {x_1'}^2 + \cdots + \lambda_n \ {x_n'}^2,$$

missä $X' = P^{\mathrm{T}}X$ (ts. $X = PX'$).

Esimerkkejä.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

68. Olkoon V eräs reaalinen sisätuloavaruus, $X,\ Y \in V$ ja $||X|| = ||Y||$. Osoita, että $X - Y$ ja $X + Y$ ovat ortogonaaliset ja tulkitse tulos alkeisgeometrian lauseena. Päteekö väite, jos avaruuden V kerroinkunta on $\mathbb{C}$.

69. Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus (siis $K = \mathbb{R}$) ja olkoot $X,\ Y,\ Z \in V$, joille $X + Y + Z = \underline{0}$, $||X|| = 4$, $||Y|| = 5$ ja $||Z|| = 6$. Määrää $(X|Y)$ ja vektorien X ja Y välisen kulman kosini.

70. Sisätuloavaruuden V vektoreista oletetaan, että $Z = 2X + Y$, $U = X - 3Y$, $X \perp Y$ ja $Z \perp U$. Määrää vektorien Z ja U pituuksien suhde.

71. Laske pisteen $(1, 3, -1)^{\mathrm{T}}$ etäisyys tasosta $2x + y + 3z = 11$.

72. Olkoon T taso $ax + by + cz + d = 0$ ja olkoon $N = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$. Osoita, että pisteen $(x_0, y_0, z_0)^{\mathrm{T}}$ etäisyys tasosta T on
$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{||N||}.$$

73. Osoita, että yhtälö $(X \mid Y) = \int_a^b X(t)Y(t)\,\mathrm{d}t$, $X,\ Y \in C([a, b])$, määrää sisätulon avaruudessa $C([a, b])$. Määritä $||X||$, kun $X(t) = e^t$, $t \in [a, b]$.

74. Olkoon P reaalikertoimisten polynomifunktioiden muodostama lineaarinen avaruus varustettuna sisätulolla $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ aina kun $f,\ g \in P$.

    a) Olkoot $f(t) = a + t$ ja $g(t) = t^2$. Määrää sellainen luku $a \in \mathbb{R}$, että vektorit f ja g ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

    b) Määrää vektoreiden f_1 ja f_2 välisen kulman kosini, kun $f_1(t) = 1 + t$ ja $f_2(t) = t^2$.

    c) Olkoot $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = a + t$ ja $f_3(t) = b + ct + t^2$. Määrää luvuille a, b ja c sellaiset arvot, että vektorit f_1, f_2 ja f_3 ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

75. Sovella Gramin–Schmidtin menetelmää avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijoukkoon $\{(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}, (3, -1, 0)^{\mathrm{T}}\}$, kun sisätulona on avaruuden $\mathbb{R}^3$ tavallinen sisätulo.

76. Osoita, että joukko $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^{\mathrm{T}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^{\mathrm{T}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^{\mathrm{T}}\right\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaali kanta. Määrää vektorin $(2, 4, 3)^{\mathrm{T}}$ koordinaatit tässä kannassa.

77. Olkoon $M = \{f \in P_2 \mid f(0) = 0\}$. Määrää komplementti $M^{\perp}$, kun avaruuden P_2 sisätulo määritellään ehdolla $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, kun $f, g \in P_2$.

78. Määrää vektorin $X_0 = (1, -1, 2, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ kohtisuora projektio aliavaruudelle $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. Määrää etäisyys $d(X_0, M)$.

79. Määrää pisteen $X_0 = (1,-1,2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ kohtisuora projektio aliavaruudelle $M = L(\{(-1,1,1)^{\mathrm{T}}\})$. Mitä on $d(X_0, M)$?

80. Olkoon $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineaarinen kuvaus, joka kuvaa vektorit X, Y ja $Z \in \mathbb{R}^3$ vektoreiksi $(0,2,-1)^{\mathrm{T}}$, $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ ja $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$. Laske $\alpha(3X - 2Y + Z)$.

81. Olkoon $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ehdot $\alpha((0,1,1)^{\mathrm{T}}) = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha((1,0,1)^{\mathrm{T}}) = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$ ja $\alpha((1,-1,0)^{\mathrm{T}}) = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ toteuttava kuvaus. Voiko α olla lineaarinen?

82. Olkoon $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineaarinen kuvaus, jolle $\alpha((1,0,0)^{\mathrm{T}}) = (1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha((0,1,0)^{\mathrm{T}}) = (0,2)^{\mathrm{T}}$ ja $\alpha((0,1,1)^{\mathrm{T}}) = (2,1)^{\mathrm{T}}$. Määrää $\alpha(3,5,2)^{\mathrm{T}}$ ja $\operatorname{Ker} \alpha$.

83. Olkoon $\alpha\colon V \to W$ lineaarinen bijektio. Osoita, että $\alpha^{-1}\colon W \to V$ on lineaarinen kuvaus.

84. Osoita, että lineaarinen kuvaus kuvaa lineaarisesti riippuvat vektorit lineaarisesti riippuviksi vektoreiksi.

85. Määritellään kuvaukset α ja β polynomiavaruudesta P polynomiavaruuteen P asettamalla $\alpha(f) = g$, missä $g(t) = f(t+1)$ aina, kun $t \in \mathbb{R}$ ja $\beta(f) = h$, missä $h(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ aina, kun $t \in \mathbb{R}$. Ovatko nämä kuvaukset lineaarisia? Tutki myös, ovatko α ja β injektioita tai surjektioita.

86. Tutki, onko kuvaus α lineaarinen, kun α on määritelty seuraavasti:

    a) $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ja $\alpha((a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}) = (a_1 - a_2,\ a_1 + a_2,\ a_2 + a_3)^{\mathrm{T}}$,

    b) $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ja $\alpha((a_1,a_2)^{\mathrm{T}}) = (a_1 + 2a_2,\ a_1 - a_2,\ 2a_1 + a_2)^{\mathrm{T}}$,

    c) $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $\alpha((a_1,a_2)^{\mathrm{T}}) = (a_1 + 1, a_1 - a_2)^{\mathrm{T}}$.

87. Määrää ydin $\operatorname{Ker} \alpha$ ja kuva $\operatorname{Im} \alpha$ edellisen tehtävän lineaarisille kuvauksille.

88. Määrää seuraavien lineaaristen kuvausten matriisit luonnollisten kantojen suhteen:

    a) $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ja $\alpha((x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_3, x_3, x_1 + 5x_2)^{\mathrm{T}}$,

    b) $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $\alpha((x_1,x_2)^{\mathrm{T}}) = (3x_1 - 2x_2, 4x_1)^{\mathrm{T}}$.

89. Määrää seuraavien lineaaristen kuvausten matriisit luonnollisten kantojen suhteen:

    a) $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ja $\alpha((x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 + x_3, x_2, -x_1 - 2x_3)^{\mathrm{T}}$,

    b) $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $\alpha(X) = 4X$,

    c) $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $\alpha((x_1,x_2)^{\mathrm{T}}) = (3x_1, x_1 - 2x_2)^{\mathrm{T}}$,

    d) $\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ja $\alpha((x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}) = (0,0,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$,

    e) $\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ja $\alpha((x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1, x_2 - x_3)^{\mathrm{T}}$.

90. Olkoon $\alpha\colon P_2 \to P_3$ lineaarinen kuvaus, jolle $\alpha(f) = g$, missä $g(t) = (t+1)f(t)$. Määrää kuvauksen α matriisi kantojen $E = \{1, t, t^2\}$ ja $F = \{1, t, t^2+t, t^3\}$ suhteen.

91. Määritellään kuvaus $\alpha\colon P_2 \to P_5$ asettamalla $\alpha(f) = g$, missä $g(t) = \int_1^t (s+2)f(s)\,\mathrm{d}s$ aina, kun $t \in \mathbb{R}$. Osoita, että α on lineaarinen kuvaus ja määrää sen matriisi kantojen $E = \{1, t, t^2\}$ ja $F = \{1, t, t^2, t^3, t^4, t^5\}$ suhteen.

92. Olkoon $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarinen kuvaus, jonka matriisi kannan $F = \{(1,2)^{\mathrm{T}}, (1,-1)^{\mathrm{T}}\}$ suhteen on

$$A = M(F;\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Onko α säännöllinen? Myönteisessä tapauksessa määrää $M(F;\alpha^{-1})$. Määrää myös $\alpha((-2,3)^{\mathrm{T}})$ ja kuvauksen α matriisi luonnollisen kannan suhteen.

93. Tarkastellaan eräitä tason $\mathbb{R}^2$ kuvauksia itselleen.

a) Osoita, että peilaus origon tai koordinaattiakselien suhteen on lineaarinen kuvaus ja määrää sen matriisi luonnollisen kannan suhteen.

b) Ns. homotetiakuvauksen matriisi luonnollisen kannan suhteen on $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, missä $a \neq 0$. Mikä on tämän kuvauksen geometrinen vaikutus?

c) Tarkastellaan projektiokuvausta P origon kautta kulkevalle suoralle, jonka suuntavektori on yksikkövektori U. Siis $P(X)$ on vektorin X projektio suoralle $L : Z = tU$. Osoita, että P on lineaarinen kuvaus ja määrää sen matriisi luonnollisen kannan suhteen.

d) Tarkastellaan kuvausta, joka kiertää vektoria X origon ympäri kulman φ positiiviseen kiertosuuntaan (eli vastapäivään). Osoita, että tämä kuvaus on lineaarinen ja että sen matriisi luonnollisen kannan suhteen on $\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$ (sama matriisi esiintyi tehtävässä 34).

94. Oletetaan, että lineaarinen kuvaus $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ toteuttaa ehdot $\alpha(X_i) = Y_i$, $i = 1, 2, 3$, missä $X_1 = (2,3,5)^{\mathrm{T}}$, $X_2 = (0,1,2)^{\mathrm{T}}$, $X_3 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$ ja $Y_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $Y_2 = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $Y_3 = (2,1,2)^{\mathrm{T}}$. Määrää kuvauksen α matriisi luonnollisen kannan suhteen.

95. Olkoon E vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta ja $F = \{(0,1,-1)^{\mathrm{T}}, (1,-1,1)^{\mathrm{T}}, (-1,1,0)^{\mathrm{T}}\}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ toinen kanta. Olkoon $\alpha \in \Lambda(\mathbb{R}^3)$, jolle

$$M(E:\alpha) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Määrää matriisit $M(E,F;I)$, $M(F,E;I)$, $M(F;\alpha)$ ja $M(E,F;\alpha)$, kun I on avaruuden $\mathbb{R}^2$ identtinen kuvaus.

96. Laske determinantit

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & -i & 2i \\ 1+i & 0 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

97. Ratkaise yhtälöt

a) $\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0.$

98. Laske $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}$, kun $a \in \mathbb{C}$ on luku, jolle $a^3 = 1$ ja $a \neq 1$.

99. a) Ratkaise yhtälö

$$\begin{vmatrix} 3+x & x & x & x \\ x & 3+x & x & x \\ x & x & 3+x & x \\ x & x & x & 3+x \end{vmatrix} = 0.$$

b) Olkoon $f(x) = \begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix}$. Osoita, että $f(0) = 0$.

100. Osoita seuraava ns. Vandermonden determinanttia koskeva tulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Osoita tämän tuloksen avulla, että eksponenttifunktiot $e^{a_1 t}, \dots, e^{a_n t}$ ovat lineaarisesti vapaat, kun luvut $a_1, \dots, a_n$ ovat erisuuria.

101. a) Laske determinanttien avulla A^{-1}, kun $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

b) Määrää A^{-1}, kun $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

102. Ratkaise Cramerin kaavalla yhtälöryhmä

$$\text{a)}\ \begin{cases} x+y+z &= 11 \\ 2x-6y-z &= 0 \\ 3x+4y+2z &= 0 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-x_4 &= -1 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1 \\ x_1-x_2+x_3 &= -2 \\ 3x_1+x_2+x_4 &= 0 \end{cases}.$$

103. Määrää yksikkövektori X, jolle $(U \times V) \times X = \underline{0}$, kun $U = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ ja $V = (1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

104. Laske vektorin $X \times (X \times Y)$ pituus, kun tiedetään, että $\|X\| = 2, \|Y\| = 3$ ja $\|X+Y\| = 4$.

105. Olkoot $X = (3,1,0)^{\mathrm{T}}$, $Y = (1,-1,u)^{\mathrm{T}}$ ja $Z = (7,1,1)^{\mathrm{T}}$. Määrää sellainen luku u, että $(X \times Y) \perp Z$.

106. Kolmion kärkipisteet ovat $(1,3,2)^{\mathrm{T}}$, $(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$ ja $(-1,2,3)^{\mathrm{T}}$. Määrää kolmion ala.

107. Määrää sen suuntaissärmiön tilavuus, jonka särminä ovat vektorit $X = (1,2,0)^{\mathrm{T}}$, $Y = (-3,1,0)^{\mathrm{T}}$ ja $Z = (4,9,-3)^{\mathrm{T}}$.

108. Olkoon $\alpha \in \Lambda(\mathbb{R}^2)$, jolle $\alpha((1,0)^{\mathrm{T}}) = (2,2)^{\mathrm{T}}$ ja $\alpha((0,1)^{\mathrm{T}}) = (5,0)^{\mathrm{T}}$. Laske $\det A$, kun $A = M(E;\alpha)$, missä $E = \{(1,0)^{\mathrm{T}}, (0,1)^{\mathrm{T}}\}$. Määrää vektorien $U = \alpha((1,1)^{\mathrm{T}})$ ja $V = \alpha((2,-1)^{\mathrm{T}})$ määräämän suunnikkaan alan suhde vektorien $(1,1)^{\mathrm{T}}$ ja $(2,-1)^{\mathrm{T}}$ määräämän suunnikkaan alaan.

109. Yhtälöllä $\begin{vmatrix} 2-x & a & 0 \\ 2 & a-x & 0 \\ 0 & 0 & b-x \end{vmatrix} = 0$ on ratkaisut $x = 1$ ja $x = 4$. Määrää vakiot a ja b. Mikä on yhtälön kolmas juuri?

110. Olkoon P ortogonaalinen, eli reaalinen ehdon $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ toteuttava, matriisi. Osoita, että $\det P = \pm 1$. Osoita edelleen, että jos $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ on ortogonaalinen, $a > 0$ ja $\det P = 1$, niin on olemassa sellainen $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ että

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

111. Olkoot A, B ja C sellaisia $n \times n$-matriiseja, että $AB = AC$ ja $\det A \neq 0$. Osoita, että $B = C$.

112. Olkoon $K = \mathbb{C}$. Määrää seuraavien matriisien ominaisarvot ja ominaisvektorit:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

113. Määrää matriisien $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ ja $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

114. Olkoon $\alpha \in \Lambda(\mathbb{R}^3)$ lineaarinen kuvaus, jonka matriisi luonnollisen kannan suhteen on $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Määrää kuvauksen α ominaisarvot ja ominaisvektorit.

115. Diagonalisoi matriisit

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

116. Laske A^{17}, kun A on edellisen tehtävän c)-kohdan matriisi.

117. Tarkastellaan lineaarista kuvausta $\alpha \colon P_1 \to P_1$, jolle $\alpha(t-1) = 2+t,\ \alpha(t+1) = 2+5t$. Määrää kuvauksen α ominaisarvot ja ominaisvektorit.

118. Matriisia A sanotaan vinoksi Hermiten matriisiksi, jos $A^* = -A$. Osoita, että jokainen joukon $M_n(\mathbb{C})$ matriisi voidaan esittää Hermiten matriisin ja vinon Hermiten matriisin summana.

119. Tutki, onko 2×2-matriisi $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)$ a) Hermiten b) vino Hermiten tai c) unitaarinen matriisi.

120. Määrää sellainen ortogonaalinen matriisi P, että $P^{\mathrm{T}}AP$ on diagonaalimatriisi, kun A on

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

121. Laske matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ominaisarvot.

122. Oletetaan, että $n \times n$-matriisilla A on ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Osoita, että $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)$ ovat matriisin $p(A)$ ominaisarvoja, kun $p \in P$ on polynomi.

123. Määrää matriisien $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ominaisarvot.