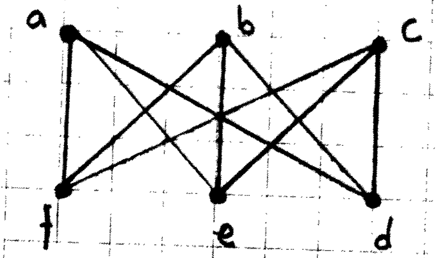
Verkot, kesä 2010
Kurssikoe 24.6.2010
Ratkaisuehdotuksia

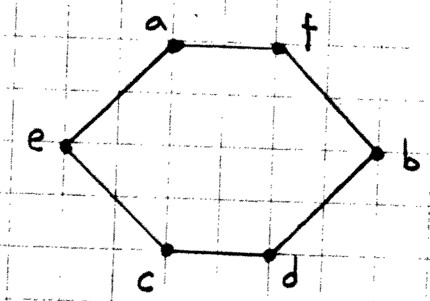
1. Hamiltonin kierros suhteikossa G on yksinkertainen kierros, joka käy jokaisessa G:n pisteessä.

Eräs Hamiltonin kierros verkossa

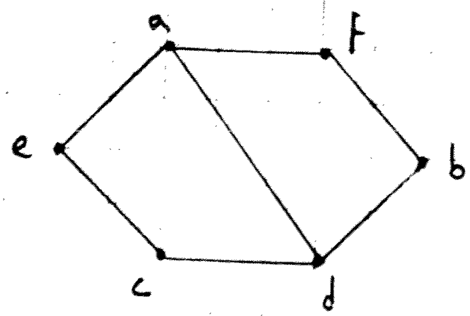
$K_{3,3}$



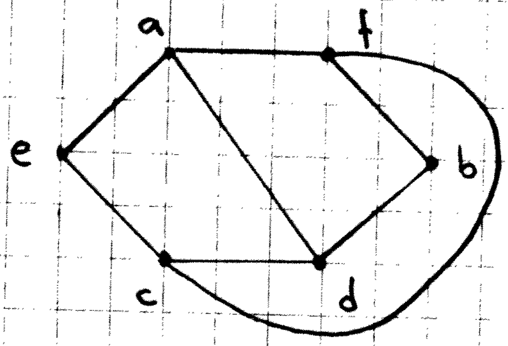
on (a, f, b, d, c, e, a). Sen määrittämän $K_{3,3}$:n aliverkon L ainoa esitys tasoverkkona on 6-kulmio



Tästä esityksestä puuttuvat $K_{3,3}$:n viivat $\overline{ad}$, $\overline{fc}$ ja $\overline{be}$. (Huomaa, että jos $K_{3,3}$:lla olisi esitys tasoverkkona ja siitä poistettaisiin nämä viivat, niin jäljelle jäisi yo. 6-kulmio.) Ainoastaan yksi näistä viivoista, esim. $\overline{ad}$, symmetrian takia ei ole väliä mikä, voidaan piirtää 6-kulmion sisään ilman, että kaksi viivaa leikkaisivat:



Jäljelle jäävistä viivoista $\overline{fc}$ ja $\overline{be}$ ainoastaan yksi, esim. $\overline{fe}$, voidaan piirtää 6-kulmion ulkopuolelle ilman, että kaksi viivaa leikkaisivat:

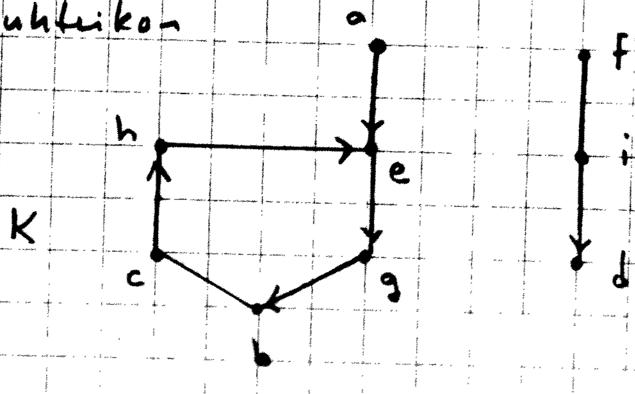


Siis $K_{3,3}$ ei ole tasoverkko.

2. Suhteikko G on vahvasti yhtenäinen, jos kaikilla $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$ pätee, että G:ssä on nuoli P:stä ja nuoli P:hen.

Suhteikon G vahvasti yhtenäinen komponentti on sellainen G:n vahvasti yhtenäinen alisuhteikko H, että millään G:n vahvasti yhtenäisellä alisuhteikolla J ei päde $J \neq H$ ja $H < J$.

Suhteikon

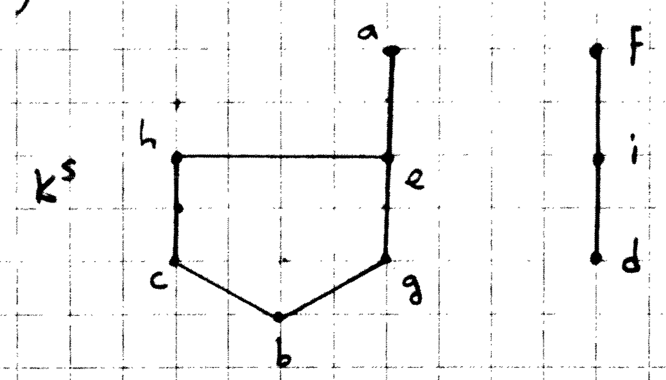


vahvasti yhtenäiset komponentit ovat $(\{a\}, \emptyset)$, $(\{d\}, \emptyset)$, $(\{e, g, b, c, h\}, \{(e,g), (g,b), (b,c), (c,b), (c,h), (h,e)\})$ ja $(\{f, i\}, \{(f,i), (i,f)\})$.

Tiedetään, että suhteikko G on vahvasti yhtenäinen jos ja vain jos kaikilla $x, y \in P_G$ G:ssä on kulku x:stä y:hyn ja y:stä x:ään. Koska K:ssa ei ole kulkua d:stä i:hin, d ja i eivät kuulu mihinkään

samaan vahvasti yhtenäiseen alisuhteikkoon, 3
eivätkä näin ollen samaan vahvasti yhtenäiseen komponenttiin.

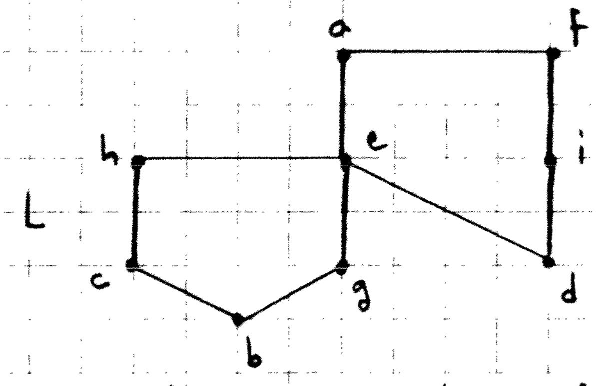
3. Symmetrinen suhteikko



on verkko, koska se on symmetrisyyden lisäksi silmukaton.

Tiedetään, että verkon viivojen joukko on renkaisto jos ja vain jos verkko on parillisasteinen. Verkossa K^s on neljä paritonasteista pistettä a, e, f ja d. On siis lisättävä vähintään kaksi viivaa verkkoon K^s, jotta näin saadun verkon L viivojen joukko olisi L:n renkaisto, ja tämä lisäys voidaan tehdä kahdella tavalla: joko lisätään viivat af ja ed tai viivat ad ja ef.

Kun valitaan ensimmäinen tapa, on näin saadun verkon



renkaiston V_L renkaat $\{\overline{eg}, \overline{gb}, \overline{bc}, \overline{ch}, \overline{he}\}$ ja $\{\overline{ed}, \overline{di}, \overline{if}, \overline{fa}, \overline{ae}\}$.

Tiedetään, että verkko on yhtenäinen ja sen viivat muodostavat renkaiston jos ja vain jos verkossa on Eulerin kierros.

Siis yhtenäisessä verkossa L on Eulerin kierros. esim. $(e, g, b, c, h, e, d, i, f, a, e)$.

4. Todistetaan induktiolla k:n suhteen molemmat väitteet samalla kertaa:

$k=1$: Nyt G on yhtenäinen ja sillä on vain ollen virittävä puu T, jolle pätee

$$v_G \geq v_T = p_T - 1 = p_G - 1.$$

Yhtäsuuruus on voimassa yllä jos ja vain jos $v_G = v_T$ eli G on puu. Toisaalta yhtenäinen verkko on puu jos ja vain jos se on renkaaton. (Huomaa, että verkko $(\emptyset, \emptyset)$ on itsenäinen yhtenäinen komponentti. Tapaus $k=0$ ei siis ole mahdollinen.)

Olkoon sitten $k \geq 1$.

Induktio-oletus: Väite pätee verkoille, joilla on k komponenttia.

Induktioaskel: Olkoon G verkko, jolla on $k+1$ komponenttia. Olkoon H verkko, joka on saatu lisäämällä viiva G:n kahden eri komponentin välille. Tällöin H:lla on k komponenttia, joten induktio-oletuksen nojalla

$$v_H \geq p_H - k$$

ja yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos H on renkaaton. Tällöin

$$v_G = v_H - 1 \geq p_H - k - 1 = p_G - (k+1)$$

ja yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos H on renkaaton, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että G on renkaaton, sillä lisätty viiva ei voi olla minkään H:n renkaan viiva. Tämä seuraa siitä, että verkon H viiva v kuuluu johonkin H:n renkaaseen jos ja vain jos verkoilla H ja H-v on sama määrä yhtenäisiä komponentteja.