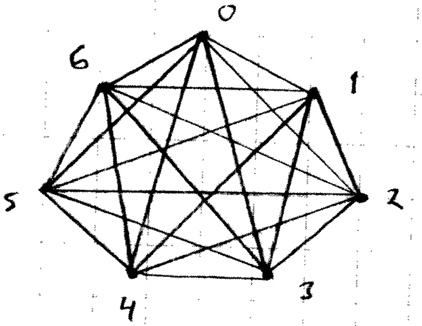
Verkot
Harj. 9 (ke 16.4)
Ratkaisuehdotuksia

1. Tarkastellaan täydellistä verkkoa K_7, jonka pisteet on nimetty luvuin 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tällöin K_7:n viivat vastaavat dominopalikoita, joiden kummassakin päässä on eri pisteet 0–6.



Täydellisenä verkkona K_7 on yhtenäinen. Koska kunkin pisteen aste on 6, K_7 on lisäksi parillisasteinen. Lauseen II.3.5 nojalla K_7:ssä on Eulerin kierros. Kun tähän kierrokseen lisätään sopiviin paikkoihin ne seitsemän dominopalikkaa, joiden molemmissa päissä on sama pistemäärä, saadaan tehtävässä etsitty umpinainen rengas, jossa palikoiden toisiaan koskettavissa päissä on sama pisteluku ja jossa kukin palikka esiintyy täsmälleen kerran.

Jos pisteitä on 0–5, tällaista umpinaista rengasta ei ole olemassa. Jos olisi, niin poistamalla siitä ne palikat, joiden molemmissa päissä on sama pisteluku, saataisiin Eulerin kierros täydellisessä verkossa K_6, jossa jokaisen pisteen aste on 5. Tämä olisi ristiriidassa Lauseen II.3.5 kanssa.

2. Lauseen II.3.6 nojalla yhtenäisessä verkossa on Eulerin kulku pisteestä a pisteeseen b, $a \neq b$, jos ja vain jos a ja b ovat paritonasteisia ja kaikki muut verkon pisteet ovat parillisasteisia. Jos nyt G on kyseessä oleva verkko, niin tehtävässä kysytään, mikä on pienin luku n, jolla G:llä on esitys

$$G = \bigvee_{i=1}^{n} G_i,$$

missä kukin G_i on Eulerin kulun määrittämä G:n aliverkko, $V_{G_i} \cap V_{G_j} = \emptyset$ kaikilla $1 \le i < j \le n$ ja
$$\bigcup_{i=1}^{n} V_{G_i} = V_G .$$

Vasemmanpuoleisessa verkossa on paritonasteisia pisteitä 16, joten sille $n = 8$. Oikeanpuoleisessa verkossa paritonasteisia pisteitä on 6, joten sille $n = 3$.

3. a) Ainoat Eulerin kulut nuolia pitkin suhteikossa S ovat

$$(4, 1, 3, 2, 4, 3, 1, 2)$$
$$(4, 3, 1, 2, 4, 1, 3, 2),$$

koska
$$d_S^+(4) = 2 = 1 + 1 = d_S^+(4) + 1,$$
$$d_S^+(2) = 2 = 1 + 1 = d_S^-(2) + 1,$$
$$d_S^+(1) = 2 = d_S^-(1),$$
$$d_S^+(3) = 2 = d_S^-(3),$$

vrt. sivun 66 tehtävän 17 tulos.

b) S:ssä on kierroksen aloituspistettä vaille täsmälleen kaksi Hamiltonin kierrosta

$$(1, 2, 4, 3, 1),$$
$$(1, 3, 2, 4, 1).$$

Kaikki S:n Hamiltonin kulut saadaan S:n Hamiltonin kierroksista.