Verkot
Harj. 8 (pe 11.6.2010)
Ratkaisuehdotuksia

1. Koska K_4 on täydellisenä verkkona yhtenäinen, niin Lemmojen II.3.3 ja II.3.4 nojalla K_4:ssä on Eulerin kierros joss V_{K_4} on renkaisto.

Harjoituksen 7 tehtävässä 1. a) osoitettiin, että K_4:ssä ei ole kahta erillistä rengasta. Jos siis V_{K_4} olisi renkaisto, sen olisi oltava yhden renkaan renkaisto. Mutta K_4:llä on ainoastaan kolmen viivan 3-renkaita ja neljän viivan 4-renkaita, kun taas $\# V_{K_4} = 6$. Siis V_{K_4} ei ole renkaisto ja siten K_4:ssä ei ole Eulerin kierrosta.

2. Olkoon R Petersenin verkon P mielivaltainen 5-rengas ja olkoon H sen virittämä P:n aliverkko. Olkoon K verkko, missä $P_K = P_P \setminus P_H$ ja

$$V_K = \{ v \in V_P : v = \overline{ab},\ a, b \in P_K \}.$$

Tällöin K on se P:n aliverkko, joka jää jäljelle, kun P:stä poistetaan H:n pisteet ja viivat sekä ne P:n viivat, joiden toinen päätepiste on H:ssa. Siis erityisesti $P_K \cap P_H = \emptyset$ ja $V_K \cap V_H = \emptyset$.

Osoitetaan, että $d_K(x) = 2$ kaikilla $x \in P_K$. Koska $d_P(x) = 3$ kaikilla $x \in P_P$ ja Lemman II.2.2 nojalla $d_H(x) = 2$ kaikilla $x \in P_H$, niin jokaisesta H:n pisteestä menee viiva johonkin K:n pisteeseen. Lisäksi mistään kahdesta eri H:n pisteestä ei voi mennä viivaa samaan K:n pisteeseen, koska P:ssä ei ole 3-renkaita eikä 4-renkaita. Siis eri

H:n pisteistä menee viiva eri K:n pisteisiin. Näin ollen on $d_K(x) = 2$ kaikilla $x \in P_K$. Korollaarin II.2.4 nojalla V_K on renkaisto. Koska $v_K = 5$, niin tässä renkaistossa on ainoastaan yksi rengas ja se on 5-rengas.

3. $\Rightarrow$ Oletetaan, että G on rengasverkko, ts. että on olemassa sellainen yksinkertainen kierros $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$ G:ssä, missä $n \geq 3$ ja $V(\bar{x}) = V_G$. Tällöin G on yhtenäinen Lauseen I.4.8 nojalla, koska G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä. Lisäksi G on 2-säännöllinen Lemman II.2.2 nojalla, jälleen koska G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että G on yhtenäinen, 2-säännöllinen ja $p_G \geq 3$. Tällöin G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä. Korollaarin II.2.4 nojalla V_G on renkaisto. Olkoot $R_1, \dots, R_n$ renkaiston V_G renkaat ja $H_1, \dots, H_n$ niiden virittämät aliverkot. Jos $n > 1$, on oltava $P_{H_i} \cap P_{H_j} = \emptyset$ kaikilla $1 \leq i < j \leq n$, koska G on 2-säännöllinen. Mutta tällöin G on epäyhtenäinen, koska $\emptyset \neq P_{H_1} \subsetneq P_G$ ja G:ssä ei ole viivaa P_{H_1}:n ja $P_G \setminus P_{H_1}$:n välillä. On siis oltava $n = 1$. Näin ollen G on rengasverkko.

Huomaa, että tehtävä on korjattu.