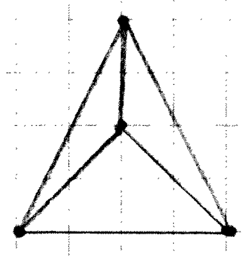
Verkot

Harj. 7 (ti 8.6.2010)

Ratkaisuehdotuksia

1.a) Täydellisessä verkossa K_4 jokaisen pisteen aste on 3. Jos K_4:ssä olisi kaksi erillistä rengasta R_1 ja R_2, niin Lauseen II.2.3 nojalla renkaiston $R_1 \cup R_2$ virittämän K_4:n aliverkon H pisteiden aste on parillinen ja näin ollen 2. Siis R_1:n viivoilla ei ole yhteisiä päätepisteitä R_2:n viivojen kanssa, jolloin $p_H \geq 6$. Tämä on mahdotonta, koska $p_{K_4} = 4$.



K_4

b) K_4:ssä on 3-renkaita yhtä monta kuin on tapoja valita 3 pistettä 4:stä:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

K_4:n 4-renkaiden lukumäärä voidaan päätellä näin. K_4:n yksinkertaisten 4-askelisten kierrosten lukumäärä on

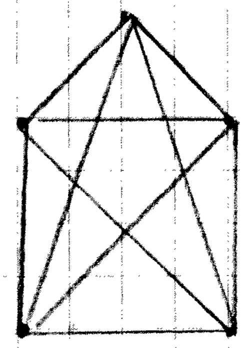
$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!.$$

Koska rengas on kierroksen viivojen joukko, on sama, mistä pisteestä kierros alkaa ja kumpaan suuntaan se kuljetaan. Siis 4-renkaiden lukumäärä on

$$\frac{4!}{4 \cdot 2} = \frac{3!}{2} = 3.$$

Siis K_4:ssä on 7 rengasta.

2. Vastaol.: K_5:ssä on kaksi keskenään erillistä neliötä R_1 ja R_2. Tällöin $R_1 \cup R_2$ on K_5:n renkaisto, jonka virittämä aliverkko H on Lauseen II.2.3 nojalla parillisasteinen. Koska R_1 ja R_2 ovat erillisiä neliöitä, on $\nu_H = 8$. p_H:n arvolle on kaksi mahdollisuutta:



1) $p_H = 4$. Tällöin Lauseen I.2.3 nojalla $d_H(x) = 4$ kaikilla $x \in P_H$. Tämä on mahdotonta, koska H:n pisteestä ei voi olla 4 viivaa kolmeen muuhun H:n pisteeseen.

2) $p_H = 5$. Nyt Lauseen I.2.3 nojalla H:ssa on 3 pistettä, joiden aste on 4, ja 2 pistettä, joiden aste on 2. Tämä on mahdotonta, koska jokaisesta kolmesta ensin mainitusta pisteestä pitäisi olla viiva kumpaankin viimeksi mainittuun pisteeseen.

Siis vastaoletus on väärä ja K_5:ssä ei ole kahta erillistä neliötä.

3. $\Rightarrow$: Jos verkko G on kaksijakoinen, niin sillä on erilys $P_G = A \cup B$, missä A:ssa ei ole vierekkäisiä pisteitä ja B:ssä ei ole vierekkäisiä pisteitä.

Jos R on G:n rengas, on olemassa sellainen yksinkertainen kierros $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$, missä $n \geq 3$, $V(\bar{x}) = R$ ja $x_i \in A$ joss $x_{i-1} \in B$ kaikilla $1 \leq i \leq n$. Koska $x_n = x_0$, on $\bar{x}$:n askelten eli R:n viivojen lukumäärä parillinen.

$\Leftarrow$: Voidaan olettaa, että G on yhtenäinen verkko, jolla $p_G \geq 3$. Olkoon $a \in P_G$ ja merkitään se A:han ja edetään tehtävänannon konstruktion mukaan. Havaitaan, että konstruktio määrittelee joukon a:sta alkavia yksinkertaisia kulkuja, joissa joka toinen piste on A:ssa ja joka toinen piste B:ssä.

Oletetaan, että konstruktion jossakin vaiheessa merkitsemätön piste x merkitään A:han ja sillä on vierekkäinen piste y, joka on merkitty myös A:han. Silloin x ja y eivät ole saman a:sta alkavan kulun pisteitä. Olkoot $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_m)$ kulku a:sta x:ään ja $\bar{y} = (y_0, \ldots, y_n)$ kulku a:sta y:hyn. Olkoon

$$i = \max \underbrace{\{ j : (x_0, \ldots, x_j) = (y_0, \ldots, y_j) \}}_{\neq \emptyset, \text{ koska } x_0 = a = y_0}.$$

Tällöin $i < \min(m, n)$, jolloin $(x_i, \ldots, x_m)$ ja $(y_i, \ldots, y_n)$ ovat yksinkertaisia vähintään 1-askeleisia kulkuja, joilla ei ole yhteisiä viivoja. Tällöin

$$\bar{z} = (x_i, \ldots, x_m) * (x, y) * (y_n, \ldots, y_i)$$

on yksinkertainen vähintään 3-askeleinen kierros.*) Koska $x_i = y_i$ ja ja $x_m, y_n \in A$, on molemmissa jonoissa $(x_i, \ldots, x_m)$ ja $(y_n, \ldots, y_i)$ joko parillinen tai pariton määrä askelia. Molemmissa tapauksissa on verkossa $\bar{z}$ pariton määrä askelia. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa.

*) eli rengas

Vastaavalla tavalla osoitetaan, että B:hen ei voi tulla kahta vierekkäistä pistettä.

Siis G on kaksijakoinen.