Verkot
Harj. 6 (pe 4.6.2010)
Ratkaisuehdotuksia

1. Määritellään verkko G asettamalla

$$P_G = \{x : x \text{ on kutsujen vieras}\},$$

$$V_G = \{\overline{xy} : x, y \in P_G, x \neq y, x \text{ ja } y \text{ ovat keskenään tuttuja}\}.$$

Koska jokaisella vieraalla on muiden vieraiden joukossa enemmän tuttuja kuin tuntemattomia, on $p_G \geq 2$ ja $d_G(x) > \frac{1}{2}(p_G - 1)$, jolloin $d_G(x) \geq \frac{1}{2} p_G$ kaikilla $x \in P_G$. Verkossa G on siten Hamiltonin kierros Korollaarin I.5.8 nojalla (joka pätee myös tapauksessa $p_G = 2$). Kun vieraat sijoitetaan pyöreän pöydän ääreen tämän kierroksen mukaisesti, tuntee jokainen molemmat vierustoverinsa.

2. b) Tässä eräs Hamiltonin kulku verkossa R_n:

Jos n on pariton: Merkitään

$$a_i = ((1,i), (2,i), \ldots, (n,i)),$$
$$y_i = ((n,i), (n-1,i), \ldots, (1,i)),$$
$$o_{i,j} = ((i,j), (i,j+1)).$$

Tällöin

$$a_1 * o_{n,1} * y_2 * o_{1,2} * a_3 * o_{1,3} * y_4 * \cdots * y_{n-1} * o_{1,n-1} * a_n$$

on Hamiltonin kulku R_n:stä. Tapauksessa $n = 1$ kyseessä on triviaali Hamiltonin kulku $((1,1))$.

Jos n on parillinen: Merkitään

$$a_{i,j} = ((i,j),(i+1,j),\dots,(n,j)),$$
$$y_{i,j} = ((n,j),(n-1,j),\dots,(i,j)),$$
$$o_{i,j} = ((i,j),(i,j+1)).$$

Tällöin

$$a_{1,1} * o_{n,1} * y_{2,2} * o_{2,2} * a_{2,3} * \dots$$
$$o_{2,n-2} * a_{2,n-1} * o_{n,n-1} * y_{1,n} *$$
$$((1,n),(1,n-1),\dots,(1,1))$$

on itse asiassa Hamiltonin kierros R_n:ssä.

c) $\Rightarrow$ Verkossa R_n on n^2 pistettä, jolloin R_n:n Hamiltonin kierroksessa on n^2 eri viivaa, koska $n > 1$. Kierroksen alku- ja loppupiste ovat samat, joten kierroksessa on oltava parillinen määrä pystyviivoja ja parillinen määrä vaakaviivoja: jos yksi viiva kuljetaan alaspäin, on toinen viiva kuljettava ylöspäin, ja jos yksi viiva kuljetaan vasemmalta oikealle, on toinen viiva kuljettava oikealta vasemmalle. Siis n^2 on parillinen, jolloin myös n on parillinen.

3. a) Pari $(S_X, \circ)$ on ryhmä:

- $\circ$ on hyvin määritelty: jos $\varphi, \psi \in S_X$, niin $\varphi \circ \psi \in S_X$:

  - jos $a, b \in X$ ja $\varphi(\psi(a)) = \varphi(\psi(b))$, niin $\psi(a) = \psi(b)$, jolloin $a = b$,

  - jos $a \in X$, niin $a = \varphi(b)$ jollakin $b \in X$ ja $b = \psi(c)$ jollakin $c \in X$, jolloin $a = \varphi(\psi(c))$.

- $\circ$ on assosiatiivinen: jos $a \in X$ ja $\varphi, \psi, \theta \in S_X$, niin

$$\begin{aligned}(\theta \circ (\varphi \circ \psi))(a) &= \theta((\varphi \circ \psi)(a)) \\ &= \theta(\varphi(\psi(a))) \\ &= (\theta \circ \varphi)(\psi(a)) \\ &= ((\theta \circ \varphi) \circ \psi)(a),\end{aligned}$$

joten $\theta \circ (\varphi \circ \psi) = (\theta \circ \varphi) \circ \psi$.

- identtinen kuvaus $id_X \in S_X$ on neutraalialkio: jos $a \in X$ ja $\varphi \in S_X$, niin

$$\begin{aligned}(id_X \circ \varphi)(a) &= id_X(\varphi(a)) = \varphi(a) \\ &= \varphi(id_X(a)) \\ &= (\varphi \circ id_X)(a),\end{aligned}$$

joten $id_X \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ id_X$.

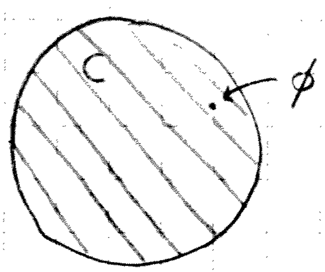
- alkion $\varphi \in S_X$ käänteisalkio on käänteiskuvaus $\varphi^{-1} \in S_X$: jos $a \in X$, niin

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi^{-1})(a) &= \varphi(\varphi^{-1}(a)) = a \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(a)) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(a),\end{aligned}$$

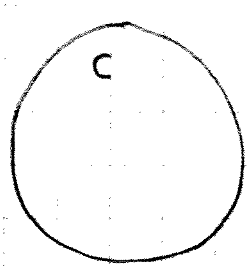
joten $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_X = \varphi^{-1} \circ \varphi$.

b) Lemma A 1.9:

a)

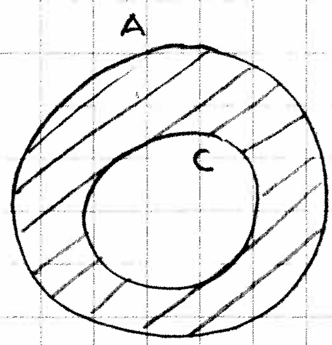


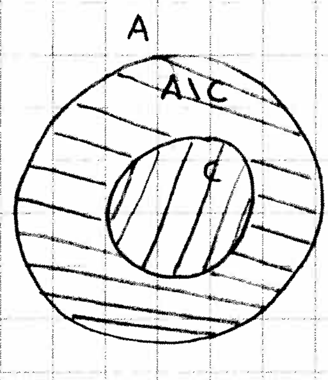
$C \Delta \emptyset = C$



$C \Delta C = \emptyset$

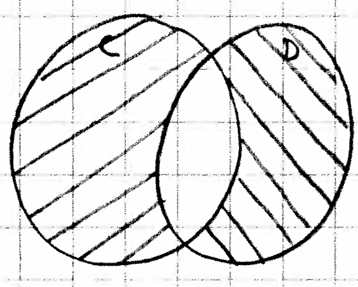
b)





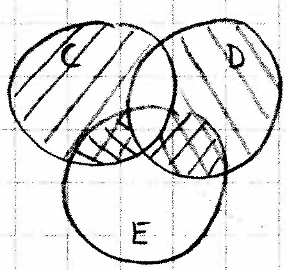
$C \triangle A = A \setminus C$ $\qquad$ $C \triangle (A \setminus C) = A$

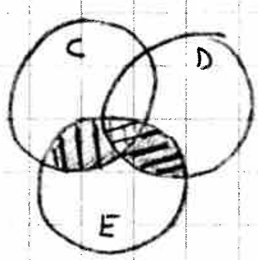
c)



$C \triangle D = D \triangle C$

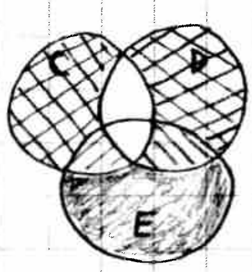
d)

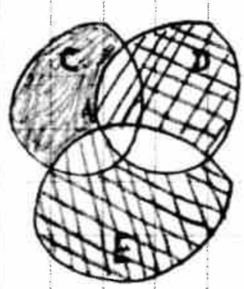




$(C \triangle D) \cap E \quad = \quad (C \cap E) \triangle (D \cap E)$

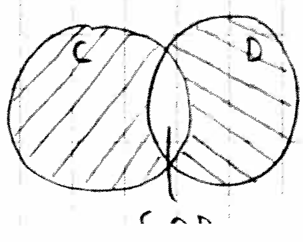
Lemma A.1.12 :





$((C \triangle D) \triangle E \quad = \quad C \triangle (D \triangle E)$

Lemma A.1.15 :



$|C \triangle D| = |C| + |D| - 2 \cdot |C \cap D|$