Verkot
Harj. 5 (ke 2.6.2010)
Ratkaisuehdotuksia

1. Merkitään tehtävän suhteikkoa G:llä.

Aloitetaan G:n triviaalista kulusta $\overline{x}_1 = (1)$.

Koska $6 \notin P(\overline{x}_1)$ ja $\overrightarrow{16} \in N_G$, saadaan G:n kulku $\overline{x}_2 = (1,6)$.

Koska $3 \notin P(\overline{x}_2)$ ja $\overrightarrow{31} \in N_G$, saadaan kulku $\overline{x}_3 = (3,1,6)$.

Koska $4 \notin P(\overline{x}_3)$ ja $\overrightarrow{64} \in N_G$, saadaan kulku $\overline{x}_4 = (3,1,6,4)$.

Koska $7 \notin P(\overline{x}_4)$ ja $\overrightarrow{73} \in N_G$, saadaan kulku $\overline{x}_5 = (7,3,1,6,4)$.

Koska $5 \notin P(\overline{x}_5)$, $\overrightarrow{57} \notin N_G$, $\overrightarrow{45} \notin N_G$ ja 7 on kulun $\overline{x}_5$ lopusta alkaen ensimmäinen piste z, jolle $\overrightarrow{z5} \in N_G$, saadaan kulku $(7,5,3,1,6,4)$.

Koska $2 \notin P(\overline{x}_6)$ ja $\overrightarrow{42} \in N_G$, saadaan kulku $\overline{x}_7 = (7,5,3,1,6,4,2)$.

Kulku $\overline{x}_7$ on Hamiltonin kulku G:ssä.

2. Yhtälöllä

$$(x-y)(x-y+1) = 20$$

eli yhtälöllä

$$y^2 + (-2x-1)y + (x^2+x-20) = 0$$

on kaksi nollakohtaa:

$$y = x - 4 \quad \text{ja} \quad y = x + 5.$$

Siis $(x-y)(x-y+1) \geq 20$ joss

$$y \leq x - 4 \quad \text{tai} \quad y \geq x + 5.$$

Kun otetaan vielä huomioon ehdot $x \neq 2y$ ja $y \neq 2x$, saadaan S:n seuraajaluettelo:

1	6, 7, 8, 9, 10
2	7, 8, 9, 10
3	8, 9, 10
4	9, 10
5	1
6	1, 2
7	1, 2, 3
8	1, 2, 3
9	1, 2, 3, 4, 5
10	1, 2, 3, 4, 6

a) Koska

$$(5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 1, 9, 4, 10, 1, 9, 5)$$

on S:n kierros, joka käy jokaisessa S:n pisteessä, on S vahvasti yhtenäinen Lauseen I.4.6 nojalla.

b) Yritetään konstruoida Hamiltonin kierros $\bar{z}$ S:ssä. Seuraajaluettelosta nähdään, että $\bar{z}$:lla on oltava osajono $(5, 1)$ ja näin ollen osajono $(6, 2)$ ja näin ollen osajono $(7, 3)$. Mutta pisteestä 8 on nuoli ainoastaan pisteisiin 1, 2 ja 3. Ei siis ole mahdollista konstruoida Hamiltonin kierrosta suhteikossa S.

3. Numeroidaan shakkiturnauksen osanottajat numeroin $1, 2, \ldots, n$, missä n on osanottajien lukumäärä. Määritellään nyt suhteikko S seuraavasti:

$$P_S = \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$N_S = \{ \overrightarrow{ij} : i, j \in P_S,\ i \neq j \text{ ja } i \text{ on voittanut } j\text{:n tai pelannut tasapelin tämän kanssa} \}.$$

Suhteikko S on täydellinen, koska jokainen osanottaja pelaa yhden pelin jokaisen muun osanottajan kanssa ja jompikumpi voittaa tai tulee tasapeli, ts. kaikilla $i, j \in P_S$, $i \neq j$, pätee

$$\overrightarrow{ij} \in N_S \text{ tai } \overrightarrow{ji} \in N_S.$$

Lauseen I.5.4 nojalla S:ssä on Hamiltonin kulku $\overline{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, missä kukin <u>$S$:n piste esiintyy</u> täsmälleen kerran ja $\overrightarrow{x_{i-1} x_i} \in N_S$ kaikilla $1 \leq i \leq n-1$. Tämä kulku on kysytty tulosluettelon järjestys.