Verkot
Harj. 4 (ma 31.5.2010)
Ratkaisuehdotuksia

1. Vastaoletus: G:ssä on nuoli $\overrightarrow{xy}$ joukkoon J. Tällöin $x \notin J$, mutta $y \in J$, ts. y on G:n juuri. Koska x:stä on kulku y:hyn ja y:stä on kulku jokaiseen G:n pisteeseen, niin myös x:stä on kulku jokaiseen G:n pisteeseen. Siis x on G:n juuri, ts. $x \in J$. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on epätotta, ja lauseen ensimmäinen väite todistettu.

Ol. sitten, että $J \neq \emptyset$, ts. on olemassa $x \in J$. Sivun 23 korollaarin nojalla x:n vahvasti yhtenäinen komponentti on joukon

$$A = \{y \in P_G : \text{G:ssä on kulku x:stä y:hyn ja kulku y:stä x:ään}\}$$

virittämä G:n alisuhteikko. Osoitetaan, että $A = J$.

$A \subset J$: Jos $y \in A$, niin y:stä on kulku x:ään, ja koska x on G:n juuri, myös y on G:n juuri, ts. $y \in J$.

$J \subset A$: Jos $y \in J$, niin y:stä on kulku x:ään, ja koska $x \in J$, niin x:stä on kulku y:hyn. Siis $y \in A$.

Siis J:n virittämä G:n alisuhteikko on G:n vahvasti yhtenäinen komponentti.

2. a) Oletetaan, että H on epäyhtenäinen verkko. Tällöin on olemassa sellainen $\emptyset \neq P \subsetneq P_H$, että H:ssa ei ole viivaa, jonka toinen päätepiste olisi P:ssä ja toinen päätepiste $P_H \setminus P$:ssä. Olkoot $x \in P$ ja $y \in P_H \setminus P$. Tällöin H:n komplementissa on viiva x:n ja jokaisen $P_H \setminus P$:n pisteen välillä sekä viiva y:n ja jokaisen P:n pisteen välillä. Siis H:n komplementissa on korkeintaan 2-askeleinen kulku kaikkien pisteiden välillä, joten se on yhtenäinen verkko Lauseen I.4.8 nojalla.

b) Oletetaan, että G:lle pätee epäyhtälö $v_G > \frac{1}{2}(p_G - 1)(p_G - 2)$. Tehdään vastaoletus: G ei ole yhten., jolloin a)-kohdan nojalla G:n komplementti $\tilde{G}$ on yhten. Koska verkko $J := V\{G, \tilde{G}\}$ on täydellinen, pätee Lauseen I.2.3 nojalla

$$v_G + v_{\tilde{G}} = v_J = \frac{1}{2} \sum_{x \in P_J} d_J(x)$$

$$= \frac{1}{2} p_J (p_J - 1)$$

$$= \frac{1}{2} p_G (p_G - 1).$$

Koska $\tilde{G}$ on yhtenäinen, niin Lauseen I.3.13 nojalla

$$v_{\tilde{G}} \geq p_{\tilde{G}} - 1 = p_G - 1.$$

Siis

$$v_G = \frac{1}{2} p_G (p_G - 1) - v_{\tilde{G}}$$

$$\leq \frac{1}{2} p_G (p_G - 1) - (p_G - 1)$$

$$= \frac{1}{2} (p_G - 1)(p_G - 2),$$

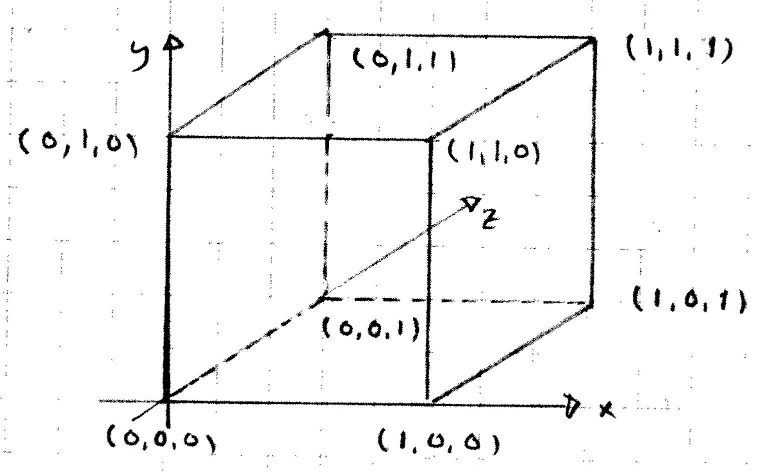
mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

3. a) Koska

- lukujen $0, 1, \ldots, 2^n - 1$ Gray-koodin jonot ovat verkon $\mathbb{B}_n$ pisteitä ja
- kahta peräkkäistä lukua vastaavat Gray-koodin jonot eroavat toisistaan vain yhdellä bitillä, ts. ovat verkon $\mathbb{B}_n$ vierekkäisiä pisteitä,

niin lukujen $0, 1, \ldots, 2^n - 1$ Gray-koodi on Hamiltonin kulku verkossa $\mathbb{B}_n$.

b) Verkon $\mathbb{B}^3$ pisteet voidaan ajatella $\mathbb{R}^3$:n "yksikkökuution" kärkien koordinaatteina:



Eräs Hamiltonin kulku $\mathbb{B}_3$:ssa:

$$((0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1), (1,0,1), (0,0,1), (0,1,1), (0,1,0))$$

Tätä vastaava Gray-koodi:

0	$\longmapsto$	(0,0,0)	4	$\longmapsto$	(1,0,1)
1	$\longmapsto$	(1,0,0)	5	$\longmapsto$	(0,0,1)
2	$\longmapsto$	(1,1,0)	6	$\longmapsto$	(0,1,1)
3	$\longmapsto$	(1,1,1)	7	$\longmapsto$	(0,1,0)