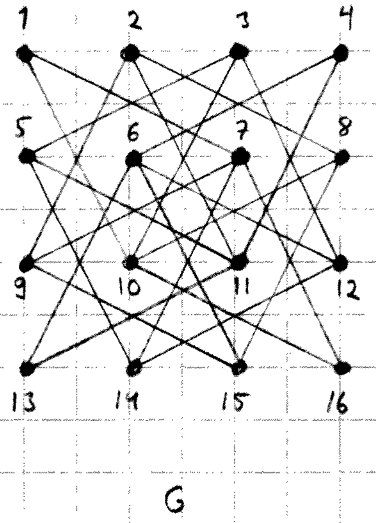
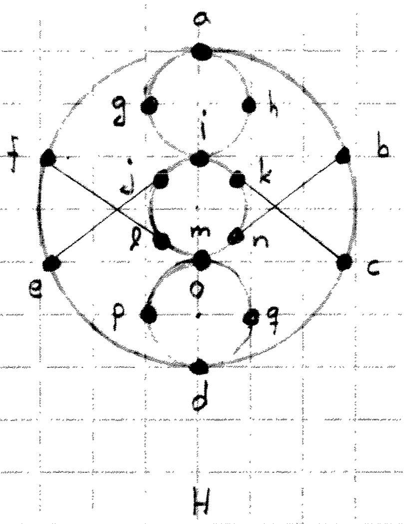
Verkot

Harj. 1 (pe 21.5.2010)

Ratkaisuehdotuksia

1. Nimetään verkkojen pisteet :




Nyt kuvaus $\varphi : P_G \to P_H$,

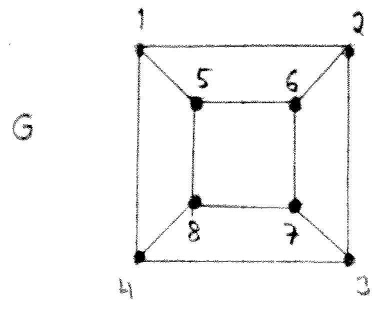
| | | | |
|---|---|---|---|
| $1 \mapsto g$ | $2 \mapsto c$ | $3 \mapsto j$ | $4 \mapsto p$ |
| $5 \mapsto e$ | $6 \mapsto m$ | $7 \mapsto a$ | $8 \mapsto k$ |
| $9 \mapsto b$ | $10 \mapsto i$ | $11 \mapsto d$ | $12 \mapsto l$ |
| $13 \mapsto o$ | $14 \mapsto f$ | $15 \mapsto n$ | $16 \mapsto h$, |

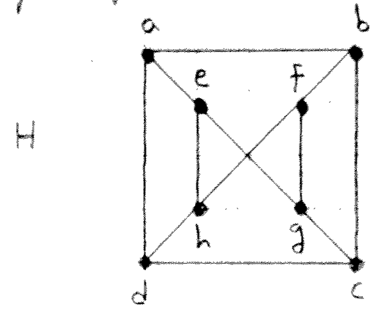
on eräs verkkojen G ja H välinen isomorfismi, koska kaik. $x, y \in P_G$ pätee

$$\overline{xy} \in V_G \quad \text{joss} \quad \overline{\varphi(x)\varphi(y)} \in V_H .$$

Tämän ekvivalenssin voimassaolon voi tarkistaa mekaanisesti esim. käymällä läpi G:n pisteistä lähtevät viivat.

2. Nimetään ensin verkkojen pisteet :



Ryhdytään nyt jakamaan $G$:n pisteitä kahteen joukkoon $A$ ja $B$ siten, että $A$:ssa ei ole vierekkäisiä pisteitä ja $B$:ssä ei ole vierekkäisiä pisteitä.

- Laitetaan piste 1 $A$:han.
- Laitetaan $A$:n pisteen 1 vierekkäiset pisteet 4,5 ja 2 $B$:hen. Havaitaan, että tällöin $B$:ssä ei ole vierekkäisiä pisteitä.
- Laitetaan $B$:n pisteen 4 vierekkäiset pisteet 8 ja 3 $A$:han. Havaitaan, että tällöin $A$:ssa ei ole vierekkäisiä pisteitä.
- Laitetaan $A$:n pisteen 8 vierekkäinen piste 7 $B$:hen. Havaitaan, että tällöin $B$:ssä ei ole vierekkäisiä pisteitä.
- Laitetaan $B$:n pisteen 7 vierekkäinen piste 6 $A$:han. Havaitaan, että tällöin $A$:ssa ei ole vierekkäisiä pisteitä.

Koska nyt $P_6 = A \cup B$, niin $G$ on kaksijakoinen.

Yritetään tehdä sama verkolle $H$.

- Laitetaan piste $a$ $A$:han.
- Laitetaan $A$:n pisteen $a$ vierekkäiset pisteet $b, e$ ja $d$ $B$:hen. Havaitaan, että tällöin $B$:ssä ei ole vierekkäisiä pisteitä.
- Laitetaan $B$:n pisteen $b$ vierekkäinen piste $f$ $A$:han ja $B$:n pisteen $e$ vierekkäinen piste $g$ $A$:han. Mutta tällöin $A$:ssa on vierekkäiset pisteet $f$ ja $g$.

Siis $H$ ei ole kaksijakoinen.

Näin ollen $G$ ja $H$ eivät ole isomorfiset.

3. a) Ol. että $G$ ja $H$ ovat isomorfiset. Tällöin on olemassa sellainen bijektio $\varphi : P_G \to P_H$, jolle kaikilla $x, y \in P_G$ pätee

$$\overline{xy} \in V_G \quad \text{joss} \quad \overline{\varphi(x)\varphi(y)} \in V_H.$$

eli

$$\overline{xy} \notin V_G \quad \text{joss} \quad \overline{\varphi(x)\varphi(y)} \notin V_H$$

eli

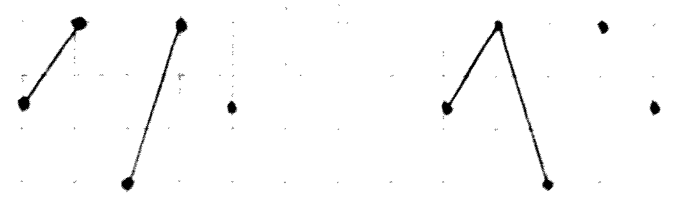
$$\overline{xy} \in V_{\tilde{G}} \quad \text{joss} \quad \overline{\varphi(x)\varphi(y)} \in V_{\tilde{H}}.$$

Siis komplementit $\tilde{G}$ ja $\tilde{H}$ ovat isomorfiset. Yllä olevan nojalla tehtävän väite pätee myös toiseen suuntaan.

b) Jos verkossa $G$ on 5 pistettä ja se on täydellinen, niin $d_G(x) = 4$ kaikilla $x \in P_G$. Lauseen I.23 nojalla $G$:n viivojen lkm:lle pätee

$$v_G = \frac{1}{2} \sum_{x \in P_G} d_G(x) = 10.$$

Jos siis verkossa on 5 pistettä ja 8 viivaa, niin sen komplementissa on 5 pistettä ja 2 viivaa. Tällaisia verkkoja on (isomorfiaa vaille) tasan kaksi:



Siis a)-kohdan perusteella on olemassa tasan kaksi epäisomorfista verkkoa, joissa on 5 pistettä ja 8 viivaa.