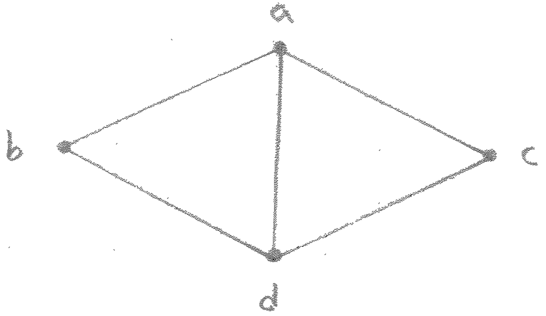
Verkot

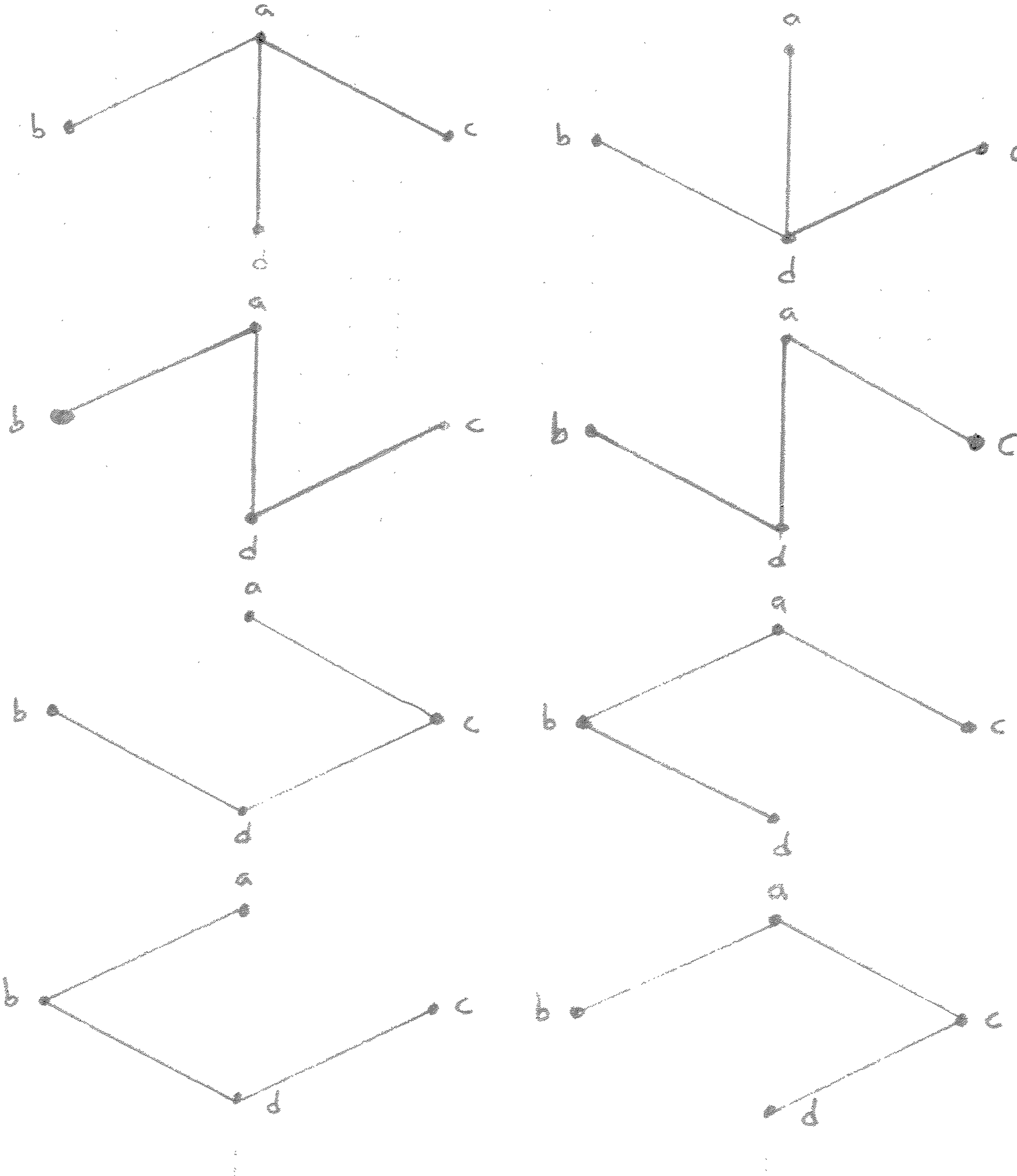
Harj. 12 (ti 22.6.2010)

Ratkaisuehdotuksia

1. Verkko G:



Virittävät puut:



Virittävässä puussa on 3 viivaa. Ne voidaan poimia G:n 5 viivan joukosta $\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla. Näistä yo. 8 verkkoa ovat puita.

2. $\Rightarrow$ Oletetaan, että S on suunnattu puu. Jos olisi $d_S^+(a) \geq 1$, olisi olemassa nuoli $\overrightarrow{xa} \in N_S$. Koska a on S:n juuri olisi myös olemassa nuoli $\overrightarrow{ax} \in N_S$. Tämä on mahdotonta, koska S on yksisuuntainen. Siis $d_S^+(a) = 0$. Olkoon $b \in P_S \setminus \{a\}$. Tällöin S:ssä on kulku a:sta b:hen, joten $d_S^+(b) \geq 1$. Jos olisi $d_S^+(b) \geq 2$, niin olisi olemassa nuolet $\overrightarrow{xb}, \overrightarrow{yb} \in N_S$, missä $x \neq y$, ja S:n yksinkertaiset kulut $(x_0,\dots,x_m)$ a:sta x:ään ja $(y_0,\dots,y_n)$ a:sta y:hyn. Tällöin puussa S^s olisi kaksi eri yksinkertaista kulkua $(x_0,\dots,x_m,b)$ ja $(y_0,\dots,y_n,b)$ a:sta b:hen, mikä on Lauseen III.1.6 nojalla mahdotonta. Siis $d_S^+(b) = 1$.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että $d_S^+(a) = 0$ ja $d_S^+(b) = 1$ kaikilla $b \in P_S \setminus \{a\}$. On osoitettava, että S^s on puu. Koska S:llä on juuri, S ja näin ollen myös S^s ovat yhtenäisiä sivun 24 Lauseen ja Lauseen I.3.3 nojalla. Jos verkossa S^s olisi rengas, niin siinä olisi yksinkertainen kierros $(x_0,\dots,x_n)$, missä $n \geq 3$. Koska $d_S^+(a) = 0$ ja $d_S^+(b) = 1$ kaikilla $b \in P_S \setminus \{a\}$, niin $(x_0,\dots,x_n)$ on yksinkertainen kierros S:ssä, joka ei kulje juuren a kautta. Mutta a:sta on kulku pisteeseen x_0, jolloin $d_S^+(x_0) \geq 2$. Tämä ristiriita osoittaa, että verkossa S^s ei voi olla rengasta. Siis S^s on puu ja siten S on suunnattu puu.

3. $\Rightarrow$ Oletetaan, että b on $\vec{T}$:n lehti, ts. $d^-_{\vec{T}}(b) = 0$. Koska $\vec{T}$:ssä on muitakin pisteitä kuin a, on $d^-_{\vec{T}}(a) \geq 1$, joten $b \neq a$. Tehtävän 2 nojalla $d^+_{\vec{T}}(b) = 1$, joten $d_T(b) = 1$ ja b on näin ollen T:n lehti.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että $b \neq a$ ja b on puun T lehti. Siis $d_T(b) = 1$. Tehtävän 2 nojalla $d^+_{\vec{T}}(b) = 1$, joten on oltava $d^-_{\vec{T}}(b) = 0$. Siis b on $\vec{T}$:n lehti.