Verkot
Harj. 11 (ma 21.6.2010)
Ratkaisuehdotuksia

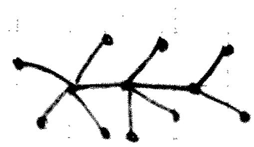
1. a) 10-pisteisessä puussa T on Lauseen III.1.3 nojalla 9 viivaa, joten Lauseen I.2.3 perusteella

$$\sum_{x \in P_T} d_T(x) = 18.$$

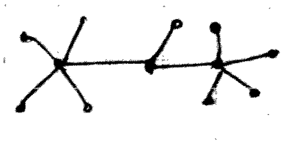
Tutkitaan tämän yhtälön ja tehtävänannon nojalla, voiko 10-pisteisessä paritonasteisessa puussa olla korkeintaan 5 lehteä. Jää ainoastaan kaksi mahdollisuutta:

1° 1-asteisia pisteitä 3 ja 3-asteisia pisteitä 5. Tällaisessa puussa on oltava ainakin kaksi 3-asteista pistettä, joiden jokainen viiva menee toiseen 3-asteiseen pisteeseen. Koska puu on renkaaton, pitäisi 3-asteisia pisteitä olla ainakin kuusi, mikä on ristiriita.

2° 1-asteisia pisteitä on 5, 3-asteisia 1 ja 5-asteisia 2. On kaksi mahdollisuutta: Joko 5-asteiset pisteet on yhdistetty viivalla



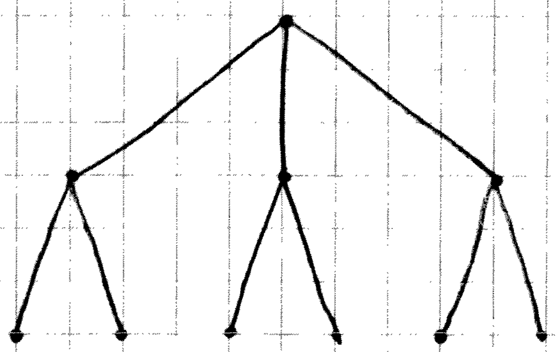
tai niitä ei ole yhdistetty viivalla



Molemmissa tapauksissa 1-asteisia pisteitä on 9, mikä on ristiriita.

Siis 10-pisteisessä paritonasteisessa puussa on ainakin 6 lehteä.

b)



2. $\Rightarrow$ Oletetaan, että $T \cup T'$ on puu. Jos T:llä ja T':lla ei ole yhtään yhteistä pistettä, niin $T \cup T'$ on epäyhtenäinen, koska siinä ei ole viivaa, jonka toinen päätepiste olisi P_T:ssä ja toinen $P_{T'}$:ssa. Koska $T \cup T'$ on puuna yhtenäinen, on T:llä ja T':lla ainakin yksi yhteinen piste. Jos yhteisiä pisteitä olisi kaksi, ts. olisi olemassa pisteet $x, y \in P_T \cap P_{T'}$, $x \neq y$, niin puussa $T \cup T'$ olisi rengas, koska Lauseen III.1.6 nojalla sekä T:ssä että T':ssa olisi yksinkertainen kulku x:stä y:hyn ja näillä kuluilla ei tehtävän oletuksen mukaan ole yhteisiä viivoja.*) Koska $T \cup T'$ on puuna renkaaton, on T:llä ja T':lla täsmälleen yksi yhteinen piste.

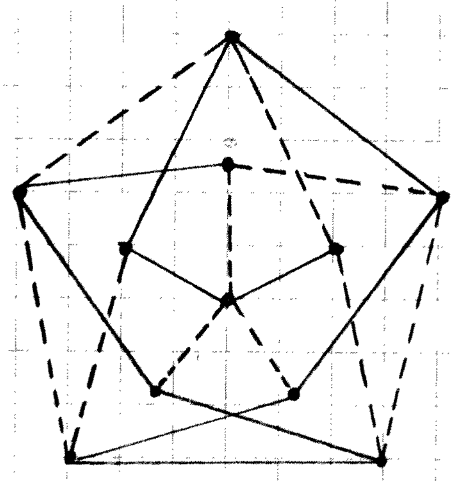
$\Leftarrow$ Oletetaan, että T:llä ja T':lla on täsmälleen yksi yhteinen piste. Tällöin $T \cup T'$ on yhtenäinen Lemman I.3.6 nojalla. Jos verkosta $T \cup T'$ poistetaan viiva w, niin se poistetaan joko puusta T tai puusta T', koska T:llä ja T':lla ei ole yhteisiä viivoja. Tällöin Lauseen III.1.7 nojalla joko $T-w$ tai $T'-w$ on epäyhtenäinen. Tällöin joko $(T \cup T')-w = (T-w) \cup T'$ tai $(T \cup T')-w = T \cup (T'-w)$ on epäyhtenäinen, koska T:llä ja T':lla on ainoastaan yksi yhteinen piste. Siis $T \cup T'$

*) Mutta voi olla muitakin yhteisiä pisteitä kuin x ja y, jos T:llä ja T':lla on enemmän kuin 2 yhteistä pistettä. Tällöin saadaan yksinkertainen kierros $T \cup T'$:ssa tarkastelemalla x:stä alkavia kulkuja ensimmäiseen yhteiseen pisteeseen.

on puu Lauseen III.1.7 nojalla.

3. Herschelin verkolla V ei ole kahta virittävää puuta, joilla ei ole yhteisiä viivoja, koska $p_V = 11$, jolloin virittävän puun viivojen lukumäärä on Lauseen III.1.3 nojalla 10 ja näin ollen kahden virittävän puun, joilla ei ole yhteisiä viivoja, viivojen kokonaislukumäärä on 20, mutta verkossa V on vain 18 viivaa.

Grötzschin verkolla tällaiset kaksi virittävää puuta on olemassa. Alla olevassa kuviossa toisen virittävän puun viivat on piirretty katkoviivoina, toisen virittävän puun viivat yhtenäisinä viivoina.



Lyhyempi ja yleisempi ratkaisu tehtävään 1.a):

Jos x on T:n lehtien lukumäärä, niin $10-x$ on vähint. 3-asteisten T:n pisteiden lukumäärä, jolloin Lauseen I.2.3 nojalla

$$v_T = \frac{1}{2}\sum_{x\in P_T} d_T(x) \geq \frac{1}{2}\left(1\cdot x + (10-x)\cdot 3\right) \geq 10$$

joss $x \leq 5$. Koska $v_T = 9$, on oltava $x \geq 6$.