

# VERKOT.

## LUKU I SUHTEIKOT JA VERKOT

1. Johdanto. ....	1
2. Pisteiden asteet. ....	7
3. Yhtenäisyys. ....	11
4. Kulku suhteikossa. ....	18
5. Hamiltonin kulut. ....	26
Harjoitustehtäviä. ....	35

## LUKU II VERKON RENKAAT

1. Renkaiden olemassaolo. ....	46
2. Renkaistot. ....	51
3. Eulerin kulut. ....	55
4. Verkon yksisuuntaistukset. ....	61
Harjoitustehtäviä. ....	65

## LUKU III PUUT

1. Puiden perusominaisuudet. ....	68
2. Virittävät puut. ....	71
3. Suunnatut puut. ....	77
Harjoitustehtäviä. ....	82

## Liitteet

1. Joukkojen symmetrinen erotus. ....	86
2. Eräitä kombinatorisia perustuloksia. ....	92



## Luku I

# Suhteikot ja verkot

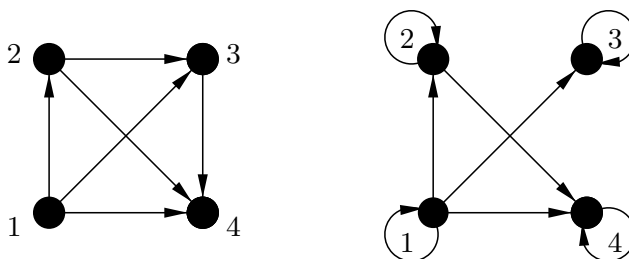
### 1. JOHDANTO.

**I 1.1 Määritelmä** *Suhteikko* on pari  $G = (X, R)$ , missä  $X$  on äärellinen joukko ja  $R$  on joukon  $X$  relaatio.

Joukon  $X$  alkioita kutsutaan suhteikon  $G$  *pisteiksi* ja joukkoa  $R$  kutsutaan suhteikon  $G$  *relaatioksi*.

Kun  $G = (X, R)$  on suhteikko, niin joukon  $X$  lisäksi myös joukko  $R$  on äärellinen, koska  $R \subset X \times X$ .

Voimme esittää äärellisen joukon  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  relaation  $R$  monella eri tavalla: voimme esimerkiksi luetella kullakin  $x \in X$  joukon  $R\{x\}$  alkiot tai voimme esittää relaation  $R$   $n \times n$ -matriisina  $(a_{ij})$ , missä  $a_{ij} = 1$  kun  $(x_i, x_j) \in R$  ja  $a_{ij} = 0$  kun  $(x_i, x_j) \notin R$ . Eräs hyvin havainnollinen esitysmuoto on geometrinen kaavio, missä  $X$ :n alkiot esitetään tason pisteinä ja piirretään nuoli alkioita  $x$  vastaavasta pisteestä alkioita  $z$  vastaavaan pisteeseen silloin kun  $xRz$ . Esimerkiksi joukon  $[4]$  järjestysrelaation  $<$  ja jakorelaation  $|$  ( $x|z$  kun luku  $x$  jakaa luvun  $z$ ) voimme esittää seuraavasti:



Määrittelemme nyt tähän geometriseen tulkintaan liittyviä käsitteitä ja termejä.

Olkoon  $X$  joukko ja  $x$  ja  $z$  joukon  $X$  alkioita. Merkitsemme  $\overrightarrow{xz} = \{(z, x)\}$  ja  $\overleftarrow{xz} = \{(x, z), (z, x)\}$ ; tällöin on voimassa  $\overline{xz} = \overrightarrow{xz} \cup \overleftarrow{xz} = \overline{zx}$ . Joukkoa  $\overrightarrow{xz}$  kutsumme *nuoleksi*  $x$ :stä  $z$ :aan; lisäksi sanomme  $x$ :n olevan nuolen  $\overrightarrow{xz}$  *lähtö* tai sen *alkupiste* ja  $z$ :n olevan nuolen  $\overrightarrow{xz}$  *maali* tai sen *loppupiste*. Joukkoa  $\overline{xz} = \overline{zx}$  kutsumme  $x$ :n ja  $z$ :n *yhdysviivaksi* tai  $x$ :n ja  $z$ :n *väliseksi viivaksi* ja sanomme, että  $x$  ja  $z$  ovat viivan  $\overline{xz}$  *päätepisteet* eli *päät*. Joukkoa  $\overrightarrow{xx} = \overline{xx}$  kutsumme *silmukaksi*  $x$ :ssä.

Olkoon  $G = (X, R)$  suhteikko ja olkoot  $x$  ja  $z$   $G$ :n pisteitä. Sanomme, että joukko  $\overline{xz} \cap R$  on  $x$ :n ja  $z$ :n *välinen yhteys suhteikossa*  $G$ . Otamme lisäksi käyttöön seuraavat sanonnat:

$\overline{xz} \cap R = \emptyset$ : “pisteet  $x$  ja  $z$  ovat erillään  $G$ :ssä”.

$\overrightarrow{xz} \subset R$ : “ $G$ :ssä on nuoli  $x$ :stä  $z$ :aan” tai “ $z$  on  $x$ :n seuraaja  $G$ :ssä”.

$\overline{xz} \subset R$ : “ $G$ :ssä on  $x$ :n ja  $z$ :n välinen viiva” tai “ $x$  ja  $z$  ovat vierekkäin  $G$ :ssä”.

$\overrightarrow{xx} \subset R$ : “ $G$ :ssä on silmukka pisteessä  $x$ ”.

Otamme vielä käyttöön seuraavat merkinnät. Kun  $G = (X, R)$  on suhteikko, niin merkitsemme  $G$ :n nuolten joukkoa  $\{\overrightarrow{xz} : \overrightarrow{xz} \subset R\}$  symbolilla  $N_G$  ja  $G$ :n viivojen joukkoa  $\{\overline{xz} : \overline{xz} \subset R\}$  symbolilla  $V_G$ . Huomaamme, että on voimassa

$$\overrightarrow{xz} \in N_G \iff \overrightarrow{xz} \subset R \iff (z, x) \in R \iff xRz \iff x \in R\{z\}$$

(Ekvivalenssin  $xRz \iff \overrightarrow{xz} \subset R$  avulla saamme korjattua ekvivalenssin  $xRz \iff (z, x) \in R$  sisältämän “nurinkurisuuden”, josta mainitsimme sivuilla 4 ja 5).

Kun  $G = (X, R)$  on suhteikko, niin merkitsemme  $G$ :n pisteiden joukkoa  $X$  symbolilla  $P_G$ . Panemme merkille, että joukot  $P_G$  ja  $N_G$  määräävät yksikäsitteisesti suhteikon  $G$ , sillä  $G = (P_G, \bigcup N_G)$ . Seuraavassa emme yleensä annakaan suhteikkoa  $G$  muodossa  $(X, R)$  vaan annamme joukot  $P_G$  ja  $N_G$ .

Esitämme suhteikon tavallisesti kuviona, missä pisteet ovat tason pisteitä. Kahden pisteen  $x$  ja  $z$  yhteys suhteikossa esitetään piirtämällä kuvioon  $x$ :stä  $z$ :hyn osoitettava nuoli silloin kun suhteikossa on nuoli  $x$ :stä  $z$ :hyn. Jos suhteikossa on pisteitä  $x$  ja  $z$  yhdistävä viiva, niin piirretään joko nuolet molempiin suuntiin tai “kaksisuuntainen nuoli” pisteiden  $x$  ja  $z$  välille tai näiden asemasta viiva (jana tai käyrä)  $x$ :n ja  $z$ :n välille.

Suhteikon  $G$  piste  $x$  on  $G$ :n *eristetty piste*, mikäli  $x$  on erillään kaikista muista  $G$ :n pisteistä.

Jos suhteikon pisteiden joukko on tyhjä, niin tällöin myös suhteikon nuolten ja viivojen joukot ja suhteikon relaatio ovat tyhjiä; kutsumme suhteikkoa  $(\emptyset, \emptyset)$  “tyhjäksi suhteikoksi” ja muiden suhteikkojen sanomme olevan “epätyhjiä suhteikkoja”. Huomaamme, että epätyhjässäkin suhteikossa voi nuolten joukko olla tyhjä; tällaisessa suhteikossa kaikki pisteet ovat eristettyjä.

**I 1.2 Määritelmä** Suhteikko  $G$  on *symmetrinen* jos kaikki  $G$ :n epätyhjäät yhteydet ovat viivoja.

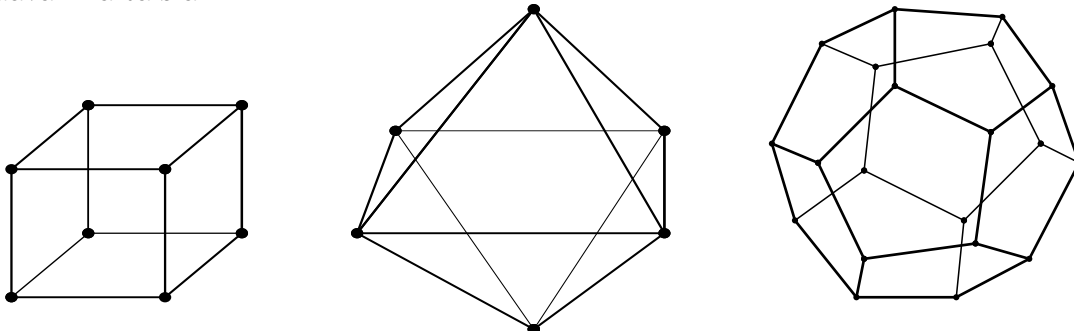
Suhteikko  $G$  on *silmukaton* jos  $G$ :ssä ei ole silmukkaa missään pisteessä.

Suhteikko  $G$  on *verkko*, jos  $G$  on silmukaton ja symmetrinen.

Suhteikko  $G$  on symmetrinen jos ja vain jos jokaista  $G$ :n nuolta  $\overrightarrow{xz}$  vastaa  $G$ :n nuoli  $\overleftarrow{zx}$ . Täten suhteikko  $G = (X, R)$  on symmetrinen jos ja vain jos relaatio  $R$  on symmetrinen (eli  $R^{-1} = R$ ). Jos tiedetään, että relaatio  $R$  on symmetrinen, niin  $R$  määräytyy yksikäsitteisesti joukon  $V_G$  avulla, sillä tässä tapauksessa  $R = \bigcup V_G$ . Symmetriset suhteikot ja erityisesti verkot annetaankin seuraavassa yleensä antamalla vastaavat  $P$ - ja  $V$ -joukot.

Jokaista suhteikkoa  $G = (X, R)$  vastaa symmetrinen suhteikko  $G^s = (X, R \cup R^{-1})$ . Havainnollisesti sanoen, suhteikko  $G^s$  saadaan suhteikosta  $G$  “muuttamalla jokainen  $G$ :n nuoli viivaksi”. Selvästikin,  $G^s$  on verkko jos ja vain jos  $G$  on silmukaton. Jos  $G$  on symmetrinen suhteikko, niin  $G^s = G$ .

Suhteikkoja ja verkkoja esiintyy mitä moninaisimmissa yhteyksissä ja usein käytetään eri yhteyksiin havainnollisesti liittyvää sanastoa yllä esitetyn sanaston asemesta. Esimerkiksi jokaiseen avaruuden  $\mathbb{R}^3$  monitahokkaaseen liittyy verkko, jonka pisteinä ovat tahokkaan *kärjet* ja viivoina tahokkaan *särmät*. Säännöllisiin 6-, 8- ja 12-tahokkaiisiin (eli kuutioon, oktaedriin ja dodekaedriin) liittyvät verkot ovat seuraavan kaltaisia:

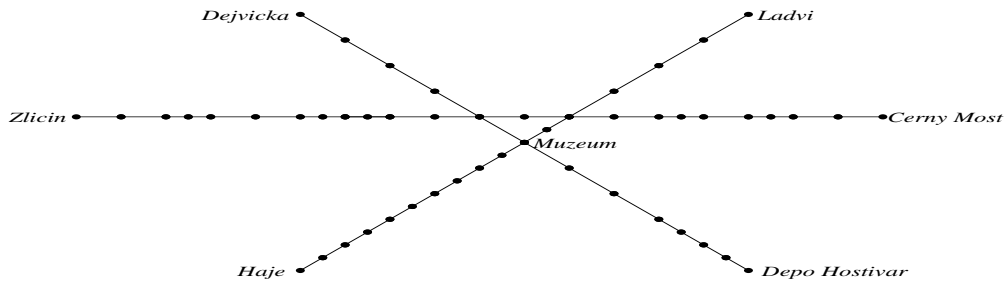


Muissa yhteyksissä voidaan puhua esimerkiksi suhteikon pisteiden ja nuolten asemasta *tiloista* ja *siirtymistä*, verkossa vierekkäin olevien pisteiden voidaan sanoa olevan toistensa *naapureita* jne.

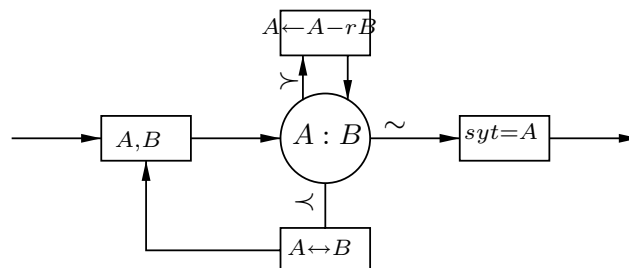
Mainitsemme nyt esimerkkejä suhteikkojen esiintymisestä “käytännön tilanteissa”.

**Esimerkki** (a) Kaupungin(osan) *katuverkkoa* voidaan kuvata verkolla, jonka pisteinä ovat katujen risteykset ja viivoina kadunosat, jotka yhdistävät “vierekkäisiä” risteyksiä. Jossain tilanteessa on luontevampaa kuvata katuverkkoa suhteikolla, jossa on viivan asemasta nuoli silloin kun kyseinen kadunosa on yksisuuntainen.

(b) Kaupunkien metrokartat saadaan usein havainnollisimmin kuvattua verkkoina. Esimerkiksi Prahan metrokartta on seuraavan näköinen.

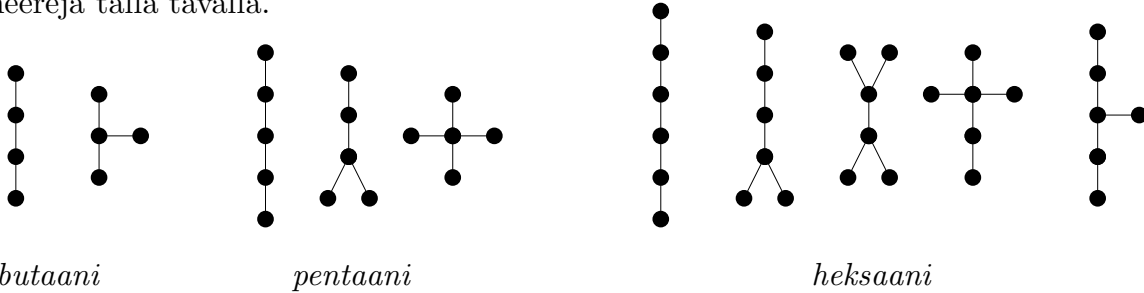


(c) Tietojenkäsittelyssä esimerkiksi ohjelmien kulkukaaviot sekä erilaiset datarakenteet (listat yms.) kuvataan usein suhteikkoina.



(d) *Etsintäpuut*, *sukupuut* ja monet muut haarautuvat rakenteet ja prosessit kuvataan luonnollisesti “puumaisina” suhteikkoina tai verkkoina.

(e) Molekyyylimalleja annetaan usein verkkoina, joiden pisteet vastaavat atomeja ja viivat atomien välisiä sidoksia. Seuraavassa kuvataan eräitä paraffinimolekyylin isomeerejä tällä tavalla.

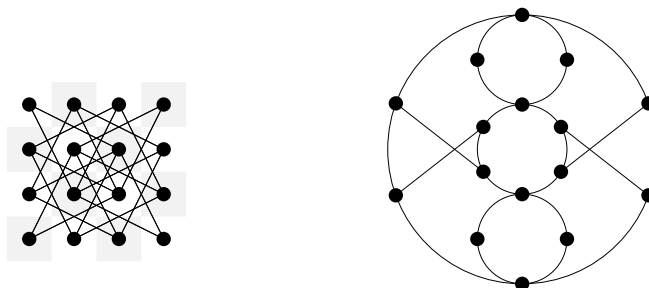


Määrittelemme seuraavaksi tilanteen, jossa kaksi suhteikkoa ovat suhteikkojen teorian kannalta oleellisesti samat eli tämän teorian suhteen ekvivalentit.

**I 1.3 Määritelmä** Suhteikot  $G$  ja  $H$  ovat *isomorfiset* jos on olemassa sellainen bijektio  $\varphi : P_G \rightarrow P_H$ , että kaikilla  $x, z \in P_G$  on voimassa  $\overrightarrow{xz} \in N_G$  jos ja vain jos  $\overrightarrow{\varphi(x)\varphi(z)} \in N_H$ ; tällaista bijektiota  $\varphi$  kutsutaan suhteikkojen  $G$  ja  $H$  väliseksi *isomorfismiksi*.

Huomaamme, että jos suhteikot  $G$  ja  $H$  ovat verkkoja, niin bijektio  $\varphi : P_G \rightarrow P_H$  on  $G$ :n ja  $H$ :n välinen isomorfismi jos ja vain jos kaikilla  $x, z \in P_G$  on voimassa  $\overrightarrow{xz} \in V_G \iff \overrightarrow{\varphi(x)\varphi(z)} \in V_H$ .

Määritelmästä seuraa suoraan, että jos suhteikot  $G$  ja  $H$  ovat keskenään isomorfiset, niin tällöin joukoissa  $P_G$  ja  $P_H$  on yhtä monta alkioa, joukoissa  $N_G$  ja  $N_H$  on yhtä monta alkioa ja joukoissa  $V_G$  ja  $V_H$  on yhtä monta alkioa. Täten pisteiden, nuolien tai viivojen lukumäärien laskeminen saattaa toisinaan riittää osoittamaan sen, että annetut kaksi suhteikkoa eivät ole keskenään isomorfiset. Usein kahden suhteikon keskinäisen isomorfisuuden tai ei-isomorfisuuden osoittaminen on käytännössä vaikeaa, varsinkin jos suhteikkojen nuolien ja viivojen lukumäärät ovat suuria. Seuraavassa kuvassa esiintyy kaksi erinäköistä verkkoa, jotka voimme kuitenkin suhteellisen helposti nähdä keskenään isomorfisiksi (vasemmanpuoleinen verkko määräytyy hevosen liikkeistä  $4 \times 4$  shakkilaudalla).



**Harjoitustehtävä:** Osoita, että edellä kuvatut kaksi verkkoa ovat isomorfiset.

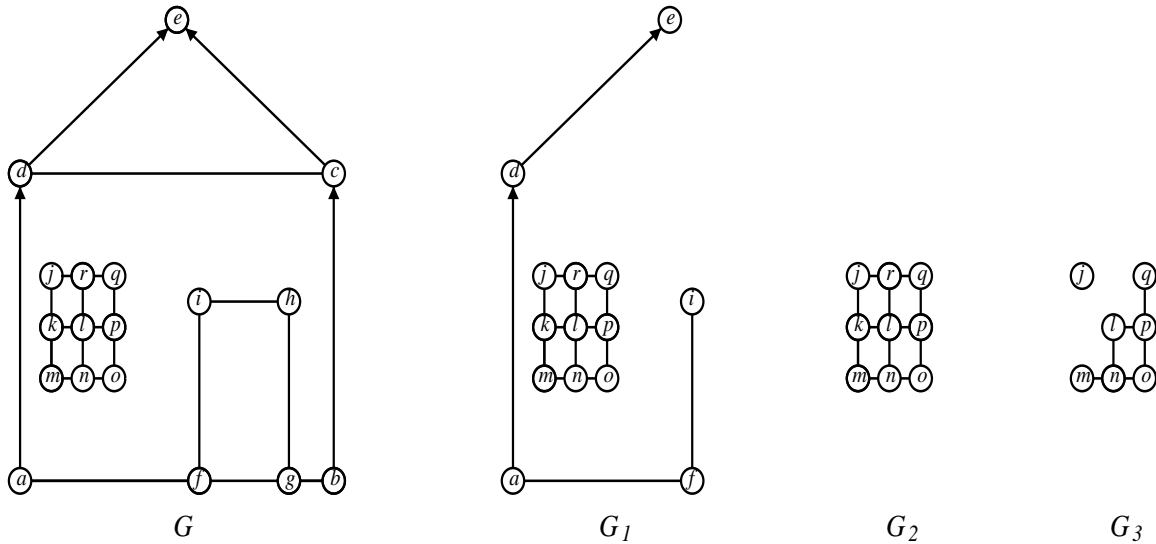
**I 1.5 Määritelmä** Olkoot  $G$  ja  $H$  suhteikkoja. Suhteikko  $H$  on suhteikon  $G$  *alisuhteikko*, jos  $P_H \subset P_G$  ja  $N_H \subset N_G$ . Suhteikon  $G$  pisteiden joukon  $P_G$  osajoukon  $A$  *virittämä  $G$ :n alisuhteikko* on se  $G$ :n alisuhteikko  $H$ , joka määräytyy ehtojen  $P_H = A$  ja  $N_H = \{\overline{xz} \in N_G : \{x, z\} \subset A\}$  nojalla.

Panemme merkille, että kun  $R$  on suhteikon  $G$  relaatio, niin joukon  $A \subset P_G$  virittämän  $G$ :n alisuhteikon relaatio on  $R \cap (A \times A)$ .

Otamme käyttöön seuraavan merkinnän: jos  $G_1$  on  $G_2$ :n alisuhteikko, niin merkitsemme  $G_1 \prec G_2$ .

Jos suhteikon alisuhteikko on verkko, niin sanomme sen olevan suhteikon *aliverkko*. Verkon pisteiden joukon osajoukon virittämä verkon alisuhteikko on verkko, jota kutsumme osajoukon *virittämäksi verkon aliverkoksi*.

**I 1.6 Esimerkki** Seuraavista suhteikoista  $G_1$  on  $G$ :n alisuhteikko,  $G_2$  on  $G_1$ :n aliverkko ja  $G_3$  on verkon  $G_2$  pisteiden osajoukon  $\{j, l, m, n, o, p, q\}$  virittämä  $G_2$ :n aliverkko.



Määrittelemme suhteikoille operaation  $\bigvee$  seuraavasti: jos  $\mathcal{H}$  on äärellinen koelma suhteikkoja, niin merkitsemme symbolilla  $\bigvee \mathcal{H}$  sitä suhteikkoa  $G$ , joka määräytyy ehdoista  $P_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} P_H$  ja  $N_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} N_H$ . Jokainen  $H \in \mathcal{H}$  on suhteikon  $\bigvee \mathcal{H}$  alisuhteikko. Jos  $\mathcal{H}$  on äärellinen ja jokainen  $H \in \mathcal{H}$  on verkko, niin suhteikko  $G = \bigvee \mathcal{H}$  on verkko ja verkko  $G$  määräytyy tällöin ehdoista  $P_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} P_H$  ja  $V_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} V_H$ .



Jos edellä  $\mathcal{H} = \{H_i : i \in I\}$ , niin voimme korvata merkinnän  $\bigvee \mathcal{H}$  merkinnällä  $\bigvee_{i \in I} H_i$ . Jos  $H_1, \dots, H_n$  ovat suhteikkoja, niin korvaamme merkinnän  $\bigvee_{i \in [n]} H_i$  usein merkinnällä  $\bigvee_{i=1}^n H_i$  tai merkinnällä  $H_1 \vee \dots \vee H_n$ .

Kuviot ovat kaikkein havainnollisin tapa esittää ”pieniä” suhteikkoja mutta jos pisteitä ja nuolia on paljon, tulee kuvioista usein sekavia, eikä niistä ole enää hyötyä. Tästä syystä suhteikkoja esitetään myös muilla tavoin, esimerkiksi suhteikon relaation matriisin, eli suhteikon ”yhteysmatriisin”, avulla (katso Luvun I harjoitustehtävät 3 ja 4). Yksinkertaisimman esitystavan tarjoavat nk. *seuraajaluettelot*, joissa luetellaan, jokaiselle suhteikon  $G = (X, R)$  pisteelle  $x$ , kaikki pisteen  $x$  seuraajat  $G$ :ssä, toisin sanoen, kaikki joukon  $R\{x\}$  alkioit.

**I 1.7 Esimerkki** Edellisen esimerkin verkko  $G_3$  esitettynä seuraajaluetteloiden avulla:

$j$	
$l$	$p, n$
$m$	$n$

$n$	$m, l, o$
$o$	$n, p$

$p$	$l, o, q$
$q$	$p$

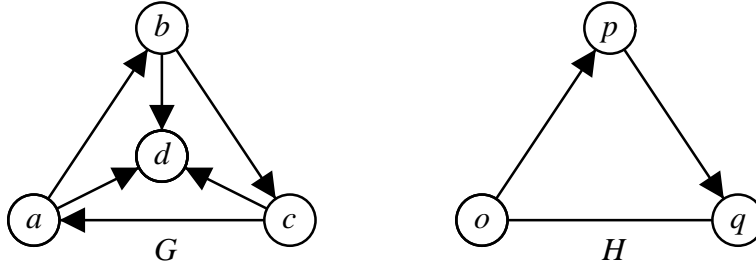
Mainitsimme lopuksi, että useissa sovellutuksissa joudutaan suhteikkojen asemasta tarkastelemaan niin kutsuttuja ”painotettuja suhteikkoja”: painotettu suhteikko on pari  $(X, f)$ , missä  $X$  on joukko ja  $f$  on joukolla  $X \times X$  määritelty reaalivoinen kuvaus. Suhteikko  $(X, R)$  voidaan esittää painotettuna suhteikkona  $(X, f)$  asettamalla  $f(x, z) = 1$  kun  $(x, z) \in R$  ja  $f(x, z) = 0$  kun  $(x, z) \notin R$ . Myös niin kutsutut ”monisuhteikot” ja ”moniverkot”, joissa kahden pisteen välillä voi olla useampia nuolia tai viivoja, voidaan esittää painotettuina suhteikkoina.

## 2. PISTEIDEN ASTEET.

Olkoon  $G = (X, R)$  suhteikko ja olkoon  $x$   $G$ :n piste. Tällöin on voimassa  $R\{x\} = \{z \in X : \overline{zx} \subset R\}$  ja  $R^{-1}\{x\} = \{z \in X : \overline{xz} \subset R\}$ . Merkitsemme  $d_G^+(x)$ :llä lukua  $|R\{x\}|$ , eli pisteeseen  $x$  saapuvien  $G$ :n nuolten lukumäärää, ja kutsumme tätä lukua pisteen  $x$  *tuloasteeksi* suhteikossa  $G$ . Merkitsemme  $d_G^-(x)$ :llä lukua  $|R^{-1}\{x\}|$ , eli pisteestä  $x$  lähtevien  $G$ :n nuolten lukumäärää, ja kutsumme tätä lukua pisteen  $x$  *lähtöasteeksi* suhteikossa  $G$ .

**Esimerkkejä** (a) Olkoon  $f$  kuvaus  $X \rightarrow Y$ . Merkitsemme  $F$ :llä suhteikkoa  $(X \cup Y, f^{-1})$  ja panemme merkille, että  $F$ :n nuolten joukko on  $\{\overline{xy} : (x, y) \in f\}$ . Jokaisella  $x \in X$  on voimassa  $d_F^-(x) = 1$ . Kuvaus  $f$  on injektio jos ja vain jos jokaisella  $y \in Y$  on voimassa  $d_F^+(y) \leq 1$  ja  $f$  on surjektio jos ja vain jos jokaisella  $y \in Y$  on voimassa  $d_F^+(y) \geq 1$ .

(b) Seuraavan suhteikon  $G$  pisteelle  $a$  on voimassa  $d_G^+(a) = 1$  ja  $d_G^-(a) = 2$  ja pisteelle  $d$  on voimassa  $d_G^+(d) = 3$  ja  $d_G^-(d) = 0$ ; suhteikon  $H$  pisteelle  $o$  on voimassa  $d_H^+(o) = 1$  ja  $d_H^-(o) = 2$ :



Merkitsemme  $n_G$ :llä suhteikon  $G$  nuolten lukumäärää eli lukua  $|N_G| = |\{\overline{xz} : \overline{xz} \subset R\}|$ . Koska kaikille  $x, z \in X$  on voimassa  $\overline{xz} = \{(z, x)\}$ , niin näemme, että  $n_G = |R|$ .

Voimme esittää luvun  $n_G$  myös  $G$ :n pisteiden asteiden avulla.

**I 2.1 Lemma** Suhteikolle  $G = (X, R)$  on voimassa

$$n_G = \sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^-(x)$$

**Todistus.** Edellä totesimme olevan voimassa  $n_G = |R|$ . Toisaalta pätee, että  $R = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times R\{x\}) = \bigcup_{x \in X} (R^{-1}\{x\} \times \{x\})$  ja tästä seuraa, että on voimassa  $|R| = \sum_{x \in X} |R\{x\}| = \sum_{x \in X} |R^{-1}\{x\}|$  eli  $|R| = \sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^-(x)$ .  $\square$

Johdamme nyt yhtälön verkon viivojen lukumäärälle. Kun  $G$  on verkko, niin merkitsemme  $v_G$ :llä verkon  $G$  viivojen lukumäärää eli lukua  $|V_G|$ .

Määrittelemme verkon  $G = (X, R)$  pisteen  $x$  asteen  $d_G(x)$  seuraavasti:

$$d_G(x) = |\{z \in X : \overline{xz} \subset R\}|.$$

Luku  $d_G(x)$  ilmoittaa siis niiden  $G$ :n viivojen lukumäärän, joilla on piste  $x$  yhtenä päänä.

Teemme myös seuraavan sopimuksen: jos  $z$  on joku "piste", joka ei kuulu joukkoon  $P_G$ , niin asetamme  $d_G(z) = 0$ .

**I 2.2 Lemma** *Olkoon  $x$  verkon  $G$  piste. Tällöin on voimassa*

$$d_G(x) = d_G^+(x) = d_G^-(x).$$

**Todistus.** Koska  $G$  on verkko, jokaisella  $z \in P_G$  on voimassa

$$\overline{xz} \in V_G \iff \overline{xz} \in N_G \iff \overline{zx} \in N_G.$$

Lemman väite seuraa edellisistä yhtälöistä pisteen  $x$  eri asteiden määritelmien nojalla.

□

Edellisten lemموjen avulla voimme nyt helposti todistaa seuraavan verkon viivojen lukumäärää koskevan tuloksen.

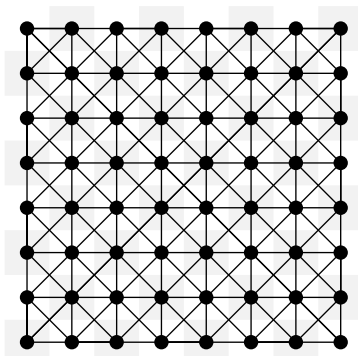
**I 2.3 Lause** *Verkolle  $G$  on voimassa*

$$\sum_{x \in P_G} d_G(x) = 2 \cdot v_G$$

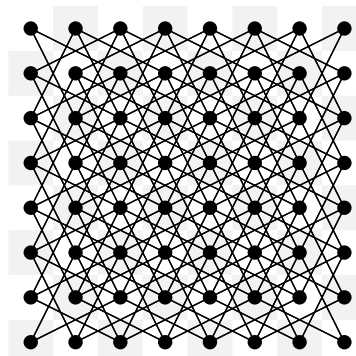
**Todistus.** Koska verkossa ei ole silmukoita ja koska kaikilla  $x, z \in X$  on voimassa  $\overline{xz} = \overline{zx} = \{(x, z), (z, x)\}$ , niin nähdään että  $v_G = \frac{1}{2} \cdot n_G$ .

Toisaalta Lemmojen I 2.1 ja I 2.2 nojalla on voimassa  $n_G = \sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G(x)$ . Näin ollen on voimassa  $|A| = 2 \cdot v_G = \sum_{x \in X} d_G(x)$ . □

**I 2.5 Esimerkki** Kuhunkin shakkipelin nappulaan, sotamiestä lukuunottamatta, liittyy verkko, jonka pisteinä ovat shakkilaudan *ruudut* ja jossa viiva “yhdistää” kahta ruutua, mikäli yhdestä voi siirtyä toiseen kyseisellä nappulalla. Kuninkaaseen ja hevoseen liittyvät verkot ovat seuraavan näköisiä:



$K$



$H$

Käyttämällä edellisen lauseen tulosta voimme helposti laskea edellä kuvattujen verkkojen  $K$  ja  $H$  viivojen lukumäärät:

Verkossa  $K$  laudan “sisäruudun” aste on 8 kun taas “kulmaruutujen” aste 3 ja muiden “reunaruutujen” aste on 5. Täten verkon  $K$  viivojen lukumäärä on puolet luvusta  $36 \cdot 8 + 4 \cdot 3 + 24 \cdot 5$  eli  $v_K = 210$ .

Verkon  $H$  pisteen aste on joko 2,3,4,6 tai 8. Neljän kulmaruudun aste on 2. Kulmaruutujen viereisten kahdeksan reunaruudun aste on 3. Lopuilla kuudellatoista reunaruudulla on kullakin asteena 4. Jos poistetaan laudan reunaruudut ja tarkastellaan jäljellejäävän  $6 \times 6$  ruudukon reunaruutuja, niin nähdään, että neljällä kulmaruudulla on asteena 4 ja muilla kuudellatoista reunaruudulla on kullakin asteena 6. Pienemmän ruudukon kuudellatoista sisäruudulla on kullakin asteena 8. Täten verkon  $H$  viivojen lukumäärä on puolet luvusta  $4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8$  eli  $v_H = 168$ .  $\square$

Sanomme verkon  $G$  pisteen  $x$  olevan *parillisasteinen*, jos luku  $d_G(x)$  on parillinen ja *paritonasteinen*, jos luku  $d_G(x)$  on pariton. Koska verkon pisteiden asteiden summa on Lauseen I 2.3 nojalla parillinen, saamme lauseelle seuraavan korollaarin.

**I 2.4 Korollaari** *Verkon paritonasteisten pisteiden lukumäärä on parillinen.*

**I 2.5 Esimerkki** Osoita, että jos talossa on vain yksi ulko-ovi, niin siinä on ainakin yksi huone, jossa on pariton määrä ovia.

**Ratkaisu:** Merkitsemme talon huoneiden joukkoa  $H$ :lla ja merkitsemme  $u$ :lla talon ulkopuolta; seuraavassa kutsumme myös  $u$ :ta “huoneeksi”. Merkitsemme  $X = H \cup \{u\}$ . Kaikilla  $h, j \in X$ , missä  $h \neq j$ , merkitsemme  $n(h, j)$ :llä huoneita  $h$  ja  $j$  yhdistävien ovien lukumäärää.

Merkitsemme  $G$ :llä sitä verkkoa, jolla

$$P_G = X \text{ ja } V_G = \{\overline{hj} : h, j \in X, h \neq j \text{ ja luku } n(h, j) \text{ on pariton}\}.$$

Huomaamme, että verkon  $G$  pisteen  $u$  aste on yksi. Korollaarin 2.4 tuloksesta seuraa, että on olemassa sellainen  $G$ :n paritonasteinen piste  $h$ , että  $h \neq u$ . Osoitamme, että huoneen  $h$  ovien lukumäärä on pariton. Merkitsemme  $J = \{j \in X : n(h, j) > 0\}$  ja  $J' = \{j \in J : \text{luku } n(h, j) \text{ on pariton}\}$ . On voimassa  $d_G(h) = |J'|$ , joten joukossa  $J'$  on pariton määrä alkioita; tästä seuraa, että luku  $\sum_{j \in J'} n(h, j)$  on pariton. Koska parillisten lukujen summa  $\sum_{j \in J \setminus J'} n(h, j)$  on parillinen, niin huoneen  $h$  ovien lukumäärä  $\sum_{j \in J} n(h, j)$  on pariton.  $\square$

Sanomme verkon olevan *parillisasteinen*, mikäli sen jokainen piste on parillisasteinen ja *paritonasteinen*, mikäli sen jokainen piste on paritonasteinen. Korollaarin I 2.4 tuloksesta seuraa, että paritonasteisessa verkossa on parillinen määrä pisteitä.

Panemme lopuksi merkille, että eräs luvussa 1.4 esitetty laatikkoperiaatteen sovellutus voidaan tulkita verkon pisteiden asteita koskevana tuloksena.

**I 2.5 Lemma** *Olkoon  $G$  verkko, jossa on ainakin kaksi pistettä. Tällöin  $G$ :ssä on kaksi eri pistettä  $x$  ja  $z$ , joille on voimassa  $d_G(x) = d_G(z)$ .*

**Todistus.** Esimerkki 0 1.6(a) □

### 3. YHTENÄISYYS.

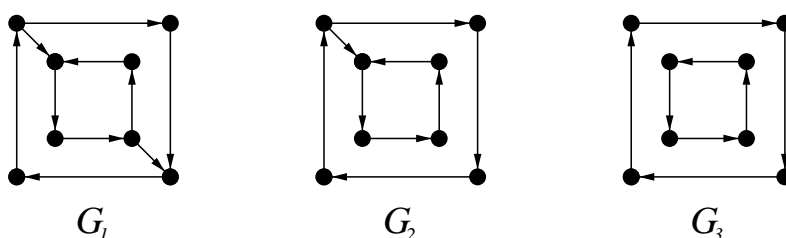
Sovellustenkin kannalta on usein tärkeätä tietää, “jakautuuko” annettu suhteikko tai verkko useampaan “erilliseen osaan” vai onko se “yhtenäinen”. Esimerkiksi, kun kaupungissa suunnitellaan seuraavan kesän katutöitä, on varmistettava, ettei missään vaiheessa synny tilannetta, jossa joku alue jäisi eristyksiin. Tarkastelemme tässä luvussa suhteikkojen yhtenäisyyttä “jakautumattomuuden” kannalta ja seuraavassa luvussa siltä kannalta, miten suhteikon pisteestä “pääsee” toiseen “siirtymällä nuolia pitkin”.

Olkoon  $G$  suhteikko, olkoon  $P$  joukon  $P_G$  osajoukko ja olkoon  $\vec{xz} \in N_G$   $G$ :n nuoli. Jos  $x \in P$  ja  $z \in P$ , niin sanomme, että  $\vec{xz}$  on *nuoli joukossa  $P$* . Jos  $x \in P$  ja  $z \notin P$ , niin sanomme, että  $\vec{xz}$  on *nuoli joukosta  $P$* . Jos taas  $x \notin P$  ja  $z \in P$ , niin sanomme, että  $\vec{xz}$  on *nuoli joukkoon  $P$* .

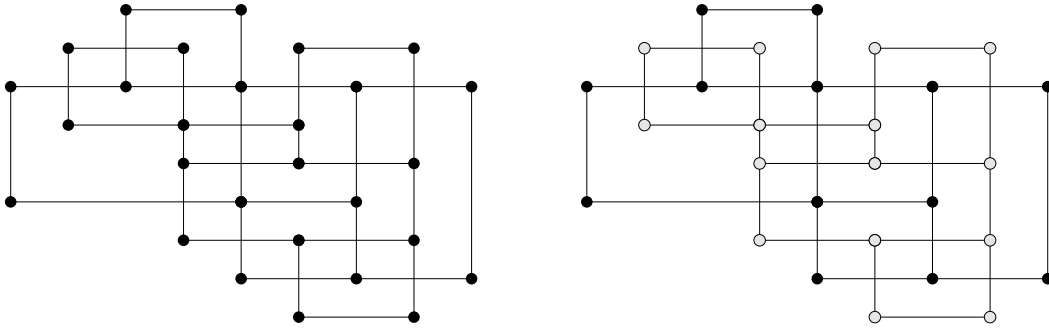
**I 3.1 Määritelmä** Suhteikko  $G$  on *yhtenäinen*, jos jokaisella  $P_G$ :n epätyhjällä, aidolla osajoukolla  $P$ ,  $G$ :ssä on joko nuoli  $P$ :hen tai nuoli  $P$ :stä.

$G$  on *vahvasti yhtenäinen*, jos jokaisella  $P_G$ :n epätyhjällä, aidolla osajoukolla  $P$ ,  $G$ :ssä on nuoli  $P$ :hen ja nuoli  $P$ :stä.

**I 3.2 Esimerkkejä** (a) Alla kuvatuista suhteikoista,  $G_1$  on vahvasti yhtenäinen,  $G_2$  on yhtenäinen muttei vahvasti yhtenäinen ja  $G_3$  ei ole yhtenäinen.



(b) Edelliset suhteikot ovat niin yksinkertaisia, että niistä näkyy ensi silmäyksellä, ovatko ne yhtenäisiä vai epäyhtenäisiä. Monimutkaisempien suhteikkojen ja verkkojen tapauksessa voi usein olla vaikeaa osoittaa yhtenäisyys tai epäyhtenäisyys. Seuraavassa vasemmalla kuvatusta verkosta ei aivan heti näe, onko verkko yhtenäinen vai ei; oikealla puolella olevasta saman verkon esityksestä näkyy, että verkko ei ole yhtenäinen.



Jos suhteikko ei ole yhtenäinen, niin sanomme sen olevan *epäyhtenäinen*.

Jos  $G$  on symmetrinen suhteikko, niin jokaisella  $\overrightarrow{xz} \in N_G$  on voimassa  $\overrightarrow{zx} \in N_G$ ; tässä tapauksessa on selvää, että  $G$  on yhtenäinen jos ja vain jos  $G$  on vahvasti yhtenäinen; lisäksi,  $G$  on yhtenäinen jos ja vain jos jokaisella joukon  $P_G$  epätyhjällä, aidolla osajoukolla  $P$  on olemassa  $G$ :n viiva, jonka toinen päätepiste on joukon  $P$  ja toinen joukon  $P_G \setminus P$  alkio (tällaisen viivan sanotaan olevan joukkojen  $P$  ja  $P_G \setminus P$  *välinen viiva*). Osoitetaan nyt, että yleisen suhteikon  $G$  tapauksessa,  $G$ :n yhtenäisyyttä voidaan luonnehtia  $G$ :tä vastaavan symmetrisen suhteikon  $G^s$  avulla.

**I 3.3 Lause** *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä suhteikolle  $G$ :*

- A.  $G$  on yhtenäinen.
- B.  $G^s$  on yhtenäinen.
- C.  $G^s$  on vahvasti yhtenäinen.

**Todistus.** Koska  $G^s$  on symmetrinen suhteikko, niin ehdot B ja C ovat keskenään yhtäpitävät.

$A \implies B$ : Koska  $P_G = P_{G^s}$  ja  $N_G \subset N_{G^s}$ , niin suhteikon  $G^s$  yhtenäisyys seuraa suhteikon  $G$  yhtenäisyydestä.

$B \implies A$ : Oletetaan, että  $G^s$  on yhtenäinen. Osoitetaan, että tällöin myös  $G$  on yhtenäinen. Olkoon  $P$  joukon  $P_G$  epätyhjä, aito osajoukko. Koska  $P_{G^s} = P_G$  ja  $G^s$  on yhtenäinen, niin on olemassa  $G^s$ :n nuoli  $\overrightarrow{xz}$ , joka on joko nuoli  $P$ :stä tai nuoli  $P$ :hen;

tällöin  $\overrightarrow{zx}$  on joko nuoli  $P$ :hen tai nuoli  $P$ :stä. Koska  $\overrightarrow{xz} \in N_{G^s}$ , on voimassa joko  $\overrightarrow{xz} \in N_G$  tai  $\overrightarrow{zx} \in N_G$ ; kummassakin tapauksessa  $G$ :ssä on joko nuoli  $P$ :hen tai nuoli  $P$ :stä. On osoitettu, että  $G$  on yhtenäinen.  $\square$

Yhtenäisyydellä ja vahvalla yhtenäisyydellä on merkitystä myös sellaisten suhteikkojen tapauksessa, joilla ei ole näitä ominaisuuksia. Osoitamme seuraavaksi, että jokainen suhteikko voidaan “jakaa” mahdollisimman suuriin (vahvasti) yhtenäisiin “osiin”.

**I 3.4 Määritelmä** Suhteikon  $G$  alisuhteikko  $H$  on  $G$ :n (vahvasti) yhtenäinen komponentti, jos  $H$  on (vahvasti) yhtenäinen, eikä millään  $G$ :n (vahvasti) yhtenäisellä alisuhteikolla  $J$  ole voimassa  $J \neq H$  ja  $H \prec J$ .

Suhteikon  $G$  (vahvasti) yhtenäiset komponentit ovat siis *maksimaalisia*  $G$ :n (vahvasti) yhtenäisiä alisuhteikkoja. Näytämme, että jokainen  $G$ :n komponentti on pistejoukkonsa virittämä  $G$ :n alisuhteikko.

**I 3.5 Lemma** Olkoon  $H$  suhteikon  $G$  (vahvasti) yhtenäinen komponentti. Tällöin  $H$  on joukon  $P_H$  virittämä  $G$ :n alisuhteikko.

**Todistus.** Merkitään  $J$ :llä joukon  $P_H$  virittämää  $G$ :n alisuhteikkoa. Tällöin on voimassa  $H \prec J$ . Koska  $H$  on (vahvasti) yhtenäinen ja koska on voimassa  $P_J = P_H$  ja  $N_H \subset N_J$ , suhteikko  $J$  on (vahvasti) yhtenäinen. Koska  $H$  on komponentti, on voimassa  $J = H$ .  $\square$

Näytämme seuraavaksi, että jokainen suhteikko voidaan “jakaa” komponentteihin. Aluksi todistamme eräitä aputuloksia.

**I 3.6 Lemma** Olkoon  $\mathcal{H}$  äärellinen kokoelma (vahvasti) yhtenäisiä suhteikkoja. Oletetaan, että kokoelmalla  $\mathcal{H}$  on sellainen jäsen  $M$ , että jokaisella  $H \in \mathcal{H}$  on voimassa  $P_H \cap P_M \neq \emptyset$ . Tällöin suhteikko  $\bigvee \mathcal{H}$  on (vahvasti) yhtenäinen.

**Todistus.** Merkitään  $G = \bigvee \mathcal{H}$ . Olkoon joukolle  $P$  voimassa  $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$ . Merkitään  $\mathcal{J} = \{H \in \mathcal{H} : P_H \subset P\}$ ,  $\mathcal{K} = \{H \in \mathcal{H} : P_H \subset P_G \setminus P\}$  ja  $\mathcal{L} = \mathcal{H} \setminus (\mathcal{J} \cup \mathcal{K})$ . Osoitetaan, että on voimassa  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ . Jos  $M \in \mathcal{L}$ , niin  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ . Oletetaan, että  $M \notin \mathcal{L}$ . Tällöin  $M \in \mathcal{J} \cup \mathcal{K}$ . Oletetaan, että vaikkapa  $M \in \mathcal{J}$  eli  $P_M \subset P$ . Olkoon  $x$  joukon  $P_G \setminus P$  piste. Koska  $x \in P_G$ , niin on olemassa sellainen  $H \in \mathcal{H}$ , että  $x \in P_H$ . Suhteikolle  $H$  on voimassa  $x \in P_H \cap (P_G \setminus P)$  ja  $\emptyset \neq P_H \cap P_M \subset P_H \cap P$ ; tästä

seuraa, että  $H \notin \mathcal{J}$  ja  $H \notin \mathcal{K}$  ja täten  $H \in \mathcal{L}$ . On osoitettu, että jos  $M \in \mathcal{J}$ , niin  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  ja aivan samoin nähdään, että jos  $M \in \mathcal{K}$ , niin  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ .

Olkoon  $H$  kokoelman  $\mathcal{L}$  jäsen. Tällöin  $P_H \not\subset P$  ja  $P_H \not\subset P_G \setminus P$ . Merkitään  $Q = P_H \cap P$  ja pannaan merkille, että  $\emptyset \neq Q \subsetneq P_H$ . Koska suhteikko  $H$  on (vahvasti) yhtenäinen, niin  $H$ :ssa on nuoli joukosta  $Q$  tai (ja) nuoli joukkoon  $Q$ . Koska jokainen  $H$ :n nuoli on myös suhteikon  $G$  nuoli ja koska  $Q \subset P$  ja  $P_H \setminus Q \subset P_G \setminus P$ , niin suhteikossa  $G$  on nuoli joukosta  $P$  tai (ja) nuoli joukkoon  $P$ . On osoitettu, että suhteikko  $G$  on (vahvasti) yhtenäinen.  $\square$

**I 3.7 Lemma** *Olkoon  $K$  suhteikon  $G$  (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko. Oletetaan, että  $P_K \neq \emptyset$ . Tällöin on olemassa täsmälleen yksi  $G$ :n (vahvasti) yhtenäinen komponentti  $H$ , jolle on voimassa  $P_H \cap P_K \neq \emptyset$ . Komponentille  $H$  on lisäksi voimassa  $K \prec H$ .*

**Todistus.** Merkitään  $\mathcal{C} = \{L : L \text{ on } G\text{:n (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko ja } P_L \cap P_K \neq \emptyset\}$ . Tällöin  $K \in \mathcal{C}$ , joten  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Merkitään  $H = \bigvee \mathcal{C}$ . Tällöin  $H$  on  $G$ :n alisuhteikko ja on voimassa  $K \prec H$  ja  $P_H \cap P_K \neq \emptyset$ . Osoitetaan, että  $H$  on  $G$ :n (vahvasti) yhtenäinen komponentti. Koska jokaisella  $L \in \mathcal{C}$  on voimassa  $P_L \cap P_K \neq \emptyset$ , niin Lemman I 3.4 tuloksesta seuraa, että  $H$  on (vahvasti) yhtenäinen. Toisaalta, jos  $J$  on  $G$ :n (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko, jolle on voimassa  $H \prec J$ , niin on voimassa  $J \in \mathcal{C}$  ja täten  $J \prec \bigvee \mathcal{C} = H$ . Edellisen nojalla  $H$  on  $G$ :n (vahvasti) yhtenäinen komponentti.

Jos  $H'$  on sellainen  $G$ :n (vahvasti) yhtenäinen komponentti, että  $P_{H'} \cap P_K \neq \emptyset$ , niin tällöin  $H' \in \mathcal{C}$ ; tästä seuraa, että on voimassa  $H' \prec \bigvee \mathcal{C} = H$  ja edelleen, että on voimassa  $H = H'$ .  $\square$

**I 3.8 Lause** *Olkoon  $G$  suhteikko, olkoon  $\mathcal{K}$   $G$ :n kaikkien yhtenäisten komponenttien joukko ja olkoon  $\mathcal{K}_v$  kaikkien  $G$ :n vahvasti yhtenäisten komponenttien joukko. Tällöin perheet  $\{P_H : H \in \mathcal{K}\}$  ja  $\{P_H : H \in \mathcal{K}_v\}$  ovat joukon  $P_G$  osituksia.*

**Todistus.** Jokaisella  $x \in P_G$ ,  $G$ :n alisuhteikko  $K_x = (\{x\}, \emptyset)$  on vahvasti yhtenäinen; lisäksi jokaiselle  $G$ :n alisuhteikolle  $J$  on voimassa  $x \in P_J \iff K_x \prec J$ . Lauseen tulos seuraa näin ollen Lemman I 3.7 tuloksesta, koska viimeksimainitun tuloksen nojalla jokaisella  $x \in P_G$ , relaatio  $K_x \prec H$  pätee täsmälleen yhdelle  $G$ :n (vahvasti) yhtenäiselle komponentille  $H$ .  $\square$

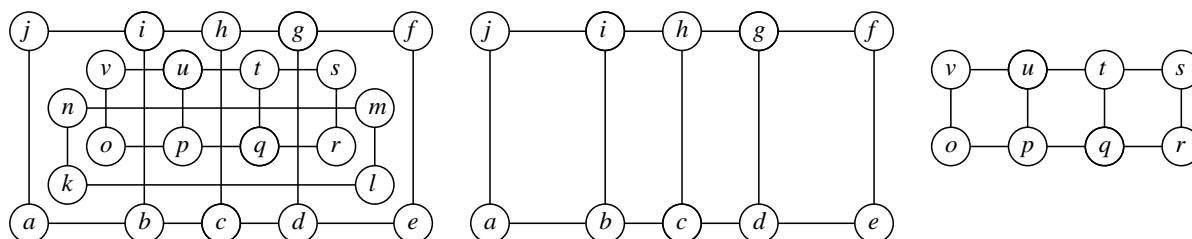


Yllä olevan lauseen nojalla suhteikon  $G$  piste  $x$  on täsmälleen yhden  $G$ :n (vahvasti) yhtenäisen komponentin piste; kyseistä komponenttia kutsutaan *pisteen  $x$  (vahvasti) yhtenäiseksi komponentiksi* suhteikossa  $G$ .

**I 3.9 Esimerkkejä** (a) Esimerkin I 3.2(a) suhteikko  $G_2$  on yhtenäinen, joten sillä on vain yksi yhtenäinen komponentti, nimittäin  $G_2$ . Verkolla  $G_2$  on kaksi vahvasti yhtenäistä komponenttia, sisemmän neliön pisteiden virittämä alisuhteikko ja ulomman neliön pisteiden virittämä alisuhteikko.

(b) Esimerkin I 3.2(b) verkon oikeanpuoleisesta esityksestä näkee helposti, että kyseisellä verkolla on kaksi yhtenäistä komponenttia, mustien pisteiden joukon virittämä aliverkko ja harmaiden pisteiden joukon virittämä aliverkko.

(b) Alla vasemmalla kuvatun verkon pisteiden  $a$  ja  $s$  yhtenäiset komponentit ovat seuraavat:



Osoitamme vielä, että suhteikon  $G$  yhtenäisten komponenttien nuolten ja viivojen joukot “jakavat”  $G$ :n vastaavat joukot.

**I 3.10 Lause** Olkoon  $G$  suhteikko ja olkoon  $\mathcal{K}$   $G$ :n kaikkien yhtenäisten komponenttien joukko. Tällöin perhe  $\{N_H : H \in \mathcal{K}\}$  on joukon  $N_G$  ositus ja perhe  $\{V_H : H \in \mathcal{K}\}$  on joukon  $V_G$  ositus.

**Todistus.** Jokaisella  $\overrightarrow{xz} \in N_G$ ,  $G$ :n alisuhteikko  $K_{\overrightarrow{xz}}$ , jonka pistejoukkona on  $\{x, z\}$  ja nuolten joukkona  $\{\overrightarrow{xz}\}$ , on yhtenäinen. Lisäksi jokaiselle  $G$ :n alisuhteikolle  $J$  pätee, että  $\overrightarrow{xz} \in N_J$  jos ja vain jos  $K_{\overrightarrow{xz}} \prec J$ . Lemman I 3.7 tuloksesta seuraa näin ollen, että on olemassa täsmälleen yksi  $H \in \mathcal{K}$ , jolle on voimassa  $\overrightarrow{xz} \in N_H$ .

Viivoja koskeva tulos todistetaan samalla lailla, tarkastelemalla nyt  $G$ :n alisuhteikkoja  $K_{\overrightarrow{xz}}$ , joilla on pistejoukkona  $\{x, z\}$  ja nuolten joukkona  $\{\overrightarrow{xz}, \overrightarrow{zx}\}$ .  $\square$

Edellisessä todistuksessa esiintyvät  $G$ :n alisuhteikot  $K_{\overrightarrow{xz}}$  ovat vahvasti yhtenäisiä ja täten Lemman I 3.7 tuloksesta seuraa, että myös perhe  $\{V_H : H \text{ on } G\text{:n vahvasti}$

yhtenäinen komponentti} on joukon  $V_G$  ositus. Vastaava tulos ei päde nuolten tapauksessa, kuten näemme tarkastelemalla edellisessä todistuksessa esiintyvää, muotoa  $K_{\overline{xz}}$  olevaa suhteikkoa: tämän vahvasti yhtenäiset komponentit ovat alisuhteikot  $(\{x\}, \emptyset)$  ja  $(\{z\}, \emptyset)$ , eikä nuoli  $\overline{xz}$  ole kummankaan komponentin nuoli. Myöskään Esimerkin I 3.2(a) suhteikossa  $G_2$  ulommasta sisempään neliöön vievä nuoli ei kuulu kumpaankaan  $G_2$ :n vahvasti yhtenäiseen komponenttiin.

Voimme panna merkille, että jos  $H$  ja  $J$  ovat suhteikon  $G$  yhtenäisiä komponentteja ja  $H \neq J$ , niin Lauseiden I 3.8 ja I 3.10 sekä Lemman I 3.5 tuloksista seuraa, että  $G$ :ssä ei ole nuolta, jonka toinen päätepiste olisi joukossa  $P_H$  ja toinen joukossa  $P_J$ .

Jos  $G$  on verkko, niin jokainen  $G$ :n yhtenäinen komponentti on Lemman I 3.5 nojalla verkko ja näin ollen, Lauseen I 3.3 nojalla, vahvasti yhtenäinen; tästä seuraa, että verkon tapauksessa yhtenäiset komponentit ovat vahvasti yhtenäisiä komponentteja ja kääntäen.

Esitämme lopuksi erään pisteiden ja viivojen lukumääriä koskevan epäyhtälön, joka pätee kaikille yhtenäisille verkoille. Epäyhtälön todistuksessa käytämme hyväksi seuraavaa aputulosta.

**I 3.11 Lemma** *Olkoon  $\mathcal{H}$  sellainen äärellinen kokoelma epätyhjiä suhteikkoja, että suhteikko  $\bigvee \mathcal{H}$  on yhtenäinen. Tällöin voidaan kirjoittaa  $\mathcal{H} = \{H_i : i \in [n]\}$  siten, että jokaisella  $1 < i \leq n$  on voimassa  $P_{H_i} \cap P_{H_j} \neq \emptyset$  jollain  $j < i$ .*

**Todistus.** Merkitään  $n = |\mathcal{H}|$  ja  $G = \bigvee \mathcal{H}$ . Jos  $n = 0$ , niin ei ole mitään todistamista. Jos  $n = 1$ , niin kirjoittamalla  $\mathcal{H} = \{H_1\}$  saadaan  $\mathcal{H}$ :lle vaadittu esitys. Oletetaan, että  $n > 1$ . Valitaan  $H_1$ :ksi mielivaltainen kokoelman  $\mathcal{H}$  jäsen ja osoitetaan, että suhteikot  $H_2, \dots, H_n$  voidaan valita rekursiivisesti niin, että jokaisella  $i = 2, \dots, n$  on voimassa 1<sup>o</sup>  $H_i \notin \{H_j : 1 \leq j < i\}$  ja 2<sup>o</sup>  $P_{H_i} \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} P_{H_j} \neq \emptyset$ . Olkoon  $k \in [n]$  sellainen luku, että  $k > 1$  ja suhteikot  $H_i, i \in [k-1]$  on jo valittu niin, että ehdot 1<sup>o</sup> ja 2<sup>o</sup> toteutuvat jokaisella  $1 < i < k$ . Osoitetaan, että  $H_k$  voidaan valita niin, että ehdot 1<sup>o</sup> ja 2<sup>o</sup> toteutuvat  $i$ :n arvolla  $k$ . Merkitään  $P = \bigcup_{j=1}^{k-1} P_{H_j}$ . Jos  $P = P_G$ , niin jokaisella  $H \in \mathcal{H}$  on voimassa  $P_H \cap P \neq \emptyset$ , joten  $H_k$ :ksi voidaan tässä tapauksessa valita mikä tahansa kokoelman  $\mathcal{H} \setminus \{H_j : j < k\}$  suhteikko. Oletetaan, että  $P \neq P_G$ . Tällöin  $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$ , joten suhteikon  $G$  yhtenäisyyden nojalla  $G$ :ssä on nuoli  $\overline{xy}$  joukkoon  $P$  tai joukosta  $P$ . Pannaan merkille, että  $\overline{xy}$  ei ole millään

$i \in [k - 1]$  suhteikon  $P_i$  nuoli; näin ollen jollain  $H' \in \mathcal{H} \setminus \{H_j : j < k\}$  on voimassa  $\vec{xy} \in N_{H'}$ . Koska nuolen  $\vec{xy}$  yksi päätepiste on joukossa  $P$ , niin on voimassa  $P_{H'} \cap P \neq \emptyset$ ; täten voidaan valita  $H_k = H'$ .  $\square$

Panemme merkille, että jos edellisessä lemmassa kokoelman  $\mathcal{H}$  suhteikot ovat yhtenäisiä, niin lemmän antama välttämätön ehto suhteikon  $\bigvee \mathcal{H}$  yhtenäisyydelle on myös riittävä.

**I 3.12 Lemma** *Olkoon  $\mathcal{H} = \{H_i : i \in [n]\}$  sellainen äärellinen kokoelma (vahvasti) yhtenäisiä suhteikkoja, että jokaisella  $1 < i \leq n$  on voimassa  $P_{H_i} \cap P_{H_j} \neq \emptyset$  jollain  $j < i$ . Tällöin suhteikko  $G = \bigvee \mathcal{H}$  on (vahvasti) yhtenäinen.*

**Todistus.** Lemman I 3.6 tuloksesta seuraa induktiolla luvun  $k$  suhteen, että jokaisella  $k \in [n]$ , suhteikko  $\bigvee_{i=1}^k H_i = (\bigvee_{i < k} H_i) \vee H_k$  on (vahvasti) yhtenäinen.  $\square$

Merkitsemme  $p_G$ :llä suhteikon  $G$  pisteiden lukumäärää  $|P_G|$ .

**I 3.13 Lause** *Olkoon  $G$  yhtenäinen verkko. Tällöin on voimassa*

$$v_G \geq p_G - 1$$

**Todistus.** Merkitään  $v_G = n$ . Jokaisella  $v \in V_G$ , merkitään  $H_v$ :llä sitä  $G$ :n aliverkkoa, jolla on pisteiden joukkona  $v$ :n päätepisteiden muodostama 2-joukko ja viivojen joukkona  $\{v\}$ . Merkitään  $\mathcal{H} = \{H_v : v \in V_G\}$ . Koska  $G$  on yhtenäinen, niin  $G$ :ssä ei ole eristettyjä pisteitä ja tästä seuraa, että on voimassa  $\bigvee \mathcal{H} = G$ . Lemman I 3.11 tuloksesta seuraa, että voidaan kirjoittaa  $\mathcal{H} = \{H_i : i \in [n]\}$  siten, että jokaisella  $1 < i \leq n$  on voimassa  $P_{H_i} \cap \bigcup_{j < i} P_{H_j} \neq \emptyset$ . Pannaan merkille, että jokaisella  $i > 1$ , koska  $P_{H_i}$  on 2-joukko, joka leikkaa joukkoa  $\bigcup_{j < i} P_{H_j}$ , niin joukossa  $P_{H_i} \setminus \bigcup_{j < i} P_{H_j}$  on korkeintaan yksi alkio. Tästä seuraa, että on voimassa

$$\begin{aligned} p_G = |P_G| &= \left| \bigcup_{j \in [n]} P_{H_j} \right| = \left| P_{H_1} \cup \left( \bigcup_{i=2}^n \left( P_{H_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} P_{H_j} \right) \right) \right| \\ &= |P_{H_1}| + \sum_{i=2}^n \left| P_{H_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} P_{H_j} \right| \leq 2 + (n-1) \cdot 1 = n+1 = v_G + 1. \quad \square \end{aligned}$$

Edellisen lauseen antamaa epäyhtälöä ei voi parantaa: alla kuvatulla yhtenäisellä verkolla  $G$  on voimassa  $v_G = p_G - 1$ .

Lauseen I 3.11 epäyhtälön voimassaolo on välttämätön, mutta ei riittävä ehto verkon yhtenäisyydelle: alla kuvattu verkko  $H$  on epäyhtenäinen vaikka on voimassa  $v_H > p_H$ .



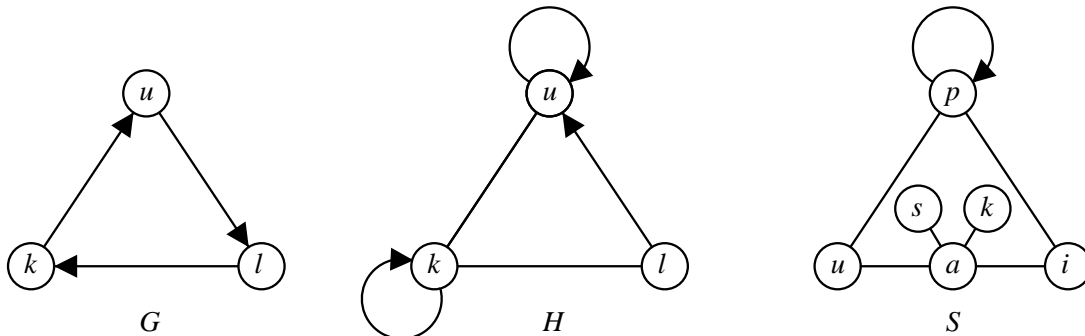
#### 4. KULKU SUHTEIKOSSA.

Suhteikon vahvan yhtenäisyyden lähempää tarkastelua varten määritellemme käsitteen, joka liittyy siihen, miten suhteikossa “pääsee” pisteestä toiseen.

**Määritelmä** Olkoon  $G$  suhteikko. *Kulku*  $G$ :ssä on sellainen jono  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$   $G$ :n pisteitä, että  $n \in \mathbb{N}$  ja jokaisella  $i \in [n]$ ,  $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$  on  $G$ :n nuoli.

Otamme nyt käyttöön kulkuihin liittyvää sanastoa ja merkintöjä. Olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  kulku suhteikossa  $G$ . Sanotaan, että kulku  $\bar{x}$  *käy* pisteissä  $x_0, \dots, x_n$  ja sanotaan myös, että  $\bar{x}$  on kulku *pisteestä*  $x_0$  *pisteeseen*  $x_n$  *pisteiden*  $x_1, \dots, x_{n-1}$  *kautta*. Kulku  $\bar{x}$  on *yksinkertainen*, mikäli kaikilla  $0 \leq i < j \leq n$ , jos  $x_i = x_j$ , niin  $i = 0$  ja  $j = n$ . Toisinsanoen, kulku  $\bar{x}$  on yksinkertainen, jos kaikki pisteet  $x_0, \dots, x_n$  ovat eri pisteitä paitsi mahdollisesti  $x_0 = x_n$ . Kulku  $\bar{x}$  on *suljettu kulku*, mikäli  $x_0 = x_n$ ; tällöin sanotaan myös, että  $\bar{x}$  on *pisteestä*  $x_0$  *lähtevä kierros*  $G$ :ssä.

**Esimerkki** Jono  $(k, u, l, k, u)$  on kulku allaolevassa suhteikossa  $G$  mutta ei suhteikossa  $H$ ; jonot  $(l, u, k, u)$  ja  $(l, u, u, k, k, u)$  ovat kulkuja  $H$ :ssa muttei  $G$ :ssä. Jonot  $(s, a, i, p, p, u, a, s)$  ja  $(s, a, i, p, p, u, a, k, a, u, p, p, i, a, s)$  ovat kierroksia alla esitettyssä suhteikossa  $S$  ja jono  $(u, p, i, a, u)$  on yksinkertainen kierros  $S$ :ssä.



Olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  kulku suhteikossa  $G$ . Sanomme kulun  $\bar{x}$ :n osajonon  $(x_{i-1}, x_i)$ , missä  $i \in [n]$ , olevan kulun  $\bar{x}$  *i:s askel*. Sanomme  $\bar{x}$ :n olevan *n-asteleinen kulku* ja sanomme myös, että  $n$  on kulun  $\bar{x}$  *pituus*. Jokaisella  $i \in [n]$ ,  $G$ :ssä on nuoli  $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$  ja sanomme  $\bar{x}$ :n kulkevan *pitkin nuolta*  $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$  *i:nnellä askeleellaan*; jos  $G$ :ssä on nuolen  $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$  lisäksi nuoli  $\overrightarrow{x_i x_{i-1}}$ , niin tällöin  $G$ :ssä on viiva  $\overline{x_{i-1}x_i}$  ja sanomme  $\bar{x}$ :n kulkevan, paitsi pitkin nuolta  $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ , myös *pitkin viivaa*  $\overline{x_{i-1}x_i}$  *i:nnellä askeleellaan*.

Olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  kulku suhteikossa  $G$ . Tällöin merkitsemme  $P(\bar{x})$ :llä joukon  $P_G$  osajoukkoa  $\{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $N(\bar{x})$ :llä joukon  $N_G$  osajoukkoa  $\{\overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{n-1}x_n}\}$  ja  $V(\bar{x})$ :llä joukon  $V_G$  osajoukkoa  $\{\overline{x_0x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}x_n}\} \cap V_G$ .

Huomaamme, että kun  $x$  on suhteikon  $G$  piste, niin yllä annettujen määritelmien nojalla jono  $(x)$  on kulku (täsmällisemmin sanoen, 0-asteleinen kierros)  $G$ :ssä. Kululle  $(x)$  pätee, että  $P((x)) = \{x\}$  ja  $N((x)) = V((x)) = \emptyset$ . Kulkuja  $(x)$ ,  $x \in P_G$ , sekä “tyhjää kulkua”  $()$  kutsumme  $G$ :n *triviaaleiksi kuluiksi*, koska ne eivät anna mitään tietoa  $G$ :n rakenteesta; muita  $G$ :n kulkuja kutsumme *epätriviaaleiksi*.

Olkoot  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  ja  $\bar{y} = (y_0, \dots, y_m)$  kulkuja suhteikossa  $G$ . Jos  $x_n = y_0$ , niin sanomme, että  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  ovat *peräkkäisiä kulkuja* ja tällöin määrittelemme kulun  $\bar{x} \star \bar{y} = (z_0, \dots, z_{n+m})$  asettamalla  $z_i = x_i$  jokaisella  $0 \leq i \leq n$  ja  $z_i = y_{i-n}$  jokaisella  $n < i \leq n+m$ . Panemme merkille, että kulun  $\bar{x} \star \bar{y}$  askelten lukumäärä on kulkujen  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  askelten lukumäärien summa.

**Esimerkki** Useissa lautapeleissä, kuten esimerkiksi “Afrikan tähdessä”, pelaaja suorittaa peräkkäisiä kulkuja pelilaudan määräämässä verkossa tai suhteikossa; pelaaja heittää kunkin pelivuoronsa alussa yhtä tai useampaa noppaa ja tämän jälkeen hän saa tehdä pelinappulallaan peliverkossa tai -suhteikossa jonkun sellaisen kulun, jonka alkupiste on edellisellä vuorolla suoritettun kulun loppupiste ja jonka askelten lukumäärä on heitettyjen noppien silmälukujen summa.

Suoraan määritelmistä saamme seuraavat tulokset.

**I 4.1 Lemma** (a) Jos  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  ovat peräkkäisiä kulkuja suhteikossa  $G$ , niin on voimassa  $P(\bar{x} \star \bar{y}) = P(\bar{x}) \cup P(\bar{y})$ ,  $N(\bar{x} \star \bar{y}) = N(\bar{x}) \cup N(\bar{y})$  ja  $V(\bar{x} \star \bar{y}) = V(\bar{x}) \cup V(\bar{y})$ .

(b) Olkoot  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  ja  $\bar{z}$  kulkuja suhteikossa  $G$ . Jos kulut  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  ovat peräkkäisiä ja kulut  $\bar{y}$  ja  $\bar{z}$  ovat peräkkäisiä, niin kulut  $\bar{x} \star \bar{y}$  ja  $\bar{z}$  ovat peräkkäisiä ja kulut  $\bar{x}$  ja  $\bar{y} \star \bar{z}$  ovat peräkkäisiä ja on voimassa  $(\bar{x} \star \bar{y}) \star \bar{z} = \bar{x} \star (\bar{y} \star \bar{z})$ .

(c) Jos  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  on (yksinkertainen) kierros suhteikossa  $G$  ja  $0 \leq k \leq n$ , niin  $\bar{y} = (x_k, \dots, x_n) \star (x_0, \dots, x_k)$  on pisteestä  $x_k$  lähtevä (yksinkertainen) kierros  $G$ :ssä. Lisäksi pätee, että  $P(\bar{y}) = P(\bar{x})$ ,  $N(\bar{y}) = N(\bar{x})$  ja  $V(\bar{y}) = V(\bar{x})$ .

Lemman (b)–kohdan nojalla voidaan lausekkeista  $(\bar{x} \star \bar{y}) \star \bar{z}$  ja  $\bar{x} \star (\bar{y} \star \bar{z})$  jättää sulut pois ja merkitä kyseisten lausekkeiden määrittämää kulkua yksinkertaisesti  $\bar{x} \star \bar{y} \star \bar{z}$ :llä; tästä seuraa edelleen, että myös merkinnät  $\bar{x} \star \bar{y} \star \bar{z} \star \bar{u}$ ,  $\bar{x} \star \bar{y} \star \bar{z} \star \bar{u} \star \bar{v}$ , jne., määräävät yksikäsitteisesti kulkuja kunhan vain vaaditut peräkkäisyys ehdot pätevät lausekkeissa esiintyvillä kuluilla  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , jne.

Osoitamme seuraavaksi, että jokainen kulku “sisältää” yksinkertaisen kulun alkupisteestä loppupisteeseensä. Todistetaan ensin eräs aputuloks.

**I 4.2 Lemma** *Olkoon  $\bar{x}$  kulku suhteikossa  $G$ . Jos kulku  $\bar{x}$  ei ole yksinkertainen, niin se voidaan esittää muodossa  $\bar{z} \star \bar{y} \star \bar{u}$ , missä  $\bar{y}$  on epätriviaali yksinkertainen kierros.*

**Todistus.** Olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$ . Oletetaan, että  $\bar{x}$  ei ole yksinkertainen. Pannaan merkille, että tällöin joukko  $K = \{(i, j) : 0 \leq i < j \leq n \text{ ja } x_i = x_j\}$  on epätyhjä. Äärellisessä epätyhjässä lukujoukossa  $\{j - i : (i, j) \in K\}$  on pienin luku; merkitään tätä lukua  $m$ :llä. Valitaan joukosta  $K$  sellainen alkio  $(k, l)$ , että  $l - k = m$ . Merkitään  $\bar{z} = (x_0, \dots, x_k)$ ,  $\bar{y} = (x_k, \dots, x_l)$  ja  $\bar{u} = (x_l, \dots, x_n)$ . Tällöin on voimassa  $\bar{x} = \bar{z} \star \bar{y} \star \bar{u}$ . Kulku  $\bar{y}$  on kierros, koska  $x_k = x_l$  ja kierros  $\bar{y}$  on epätriviaali, koska sen askelten lukumäärä on  $l - k = m \geq 1$ . Lisäksi kierros  $\bar{y}$  on yksinkertainen, koska muussa tapauksessa löydettäisiin sellainen joukon  $K$  alkio  $(i, j)$ , että olisi voimassa  $k \leq i < j \leq l$  ja  $(i, j) \neq (k, l)$ ; tällöin olisi voimassa  $j - i < l - k = m$ , ristiriidassa luvun  $m$  minimaalisuuden kanssa.  $\square$

**Esimerkki** Edellä esiintynyt kulku  $(s, a, i, p, p, u, a, k, a, u, p, p, i, a, s)$  ei ole yksinkertainen ja sille löytyy kolme edellisen lemmän mukaista esitystä:

$$(s, a, i, p) \star (p, p) \star (p, u, a, k, a, u, p, p, i, a, s),$$

$$(s, a, i, p, p, u, a) \star (a, k, a) \star (a, u, p, p, i, a, s) \text{ ja}$$

$$(s, a, i, p, p, u, a, k, a, u, p) \star (p, p) \star (p, i, a, s).$$

**I 4.3 Lemma** *Olkoot  $x$  ja  $y$  suhteikon  $G$  pisteitä. Jos  $G$ :ssä on kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ , niin  $G$ :ssä on yksinkertainen kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ .*

**Todistus.** Jos  $G$ :ssä on kulku  $x$ :stä  $y$ :hyn, niin  $G$ :ssä on sellainen kulku  $\bar{x}$   $x$ :stä  $y$ :hyn, jonka askelten lukumäärä on pienin mahdollinen. Osoitamme, että kulku  $\bar{x}$  on yksinkertainen. Teemme vastaväitteen:  $\bar{x}$  ei ole yksinkertainen. Edellisen lemmän nojalla voimme esittää  $\bar{x}$ :n muodossa  $\bar{z} \star \bar{y} \star \bar{v}$ , missä  $\bar{y}$  on epätriviaali yksinkertainen kierros. Koska  $\bar{y}$  on kierros, niin kulut  $\bar{z}$  ja  $\bar{v}$  ovat peräkkäisiä. Jono  $\bar{z} \star \bar{v}$  on kulku  $G$ :ssä  $x$ :stä  $y$ :hyn ja sen askelten lukumäärä on  $n - m$ , missä  $n$  on  $\bar{x}$ :n ja  $m$   $\bar{y}$ :n askelten lukumäärä; tästä seuraa ristiriita kulun  $\bar{x}$  minimaalisuusominaisuuden kanssa, sillä  $\bar{y}$ :n epätriviaalisuuden nojalla on voimassa  $m \geq 1$ .  $\square$

Vahvan yhtenäisyyden tarkastelua varten tarvitsemme erästä kierrosten olemassaoloon liittyvää aputulosta.

**I 4.4 Lemma** *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä suhteikon  $G$  pisteille  $x$  ja  $y$ .*

A.  $G$ :ssä on kulku  $x$ :stä  $y$ :hyn ja kulku  $y$ :stä  $x$ :ään.

B.  $G$ :ssä on kierros, joka käy pisteissä  $x$  ja  $y$ .

C.  $G$ :ssä on pisteestä  $x$  lähtevä kierros, joka käy pisteessä  $y$ .

**Todistus.**  $A \implies C$ : Olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  kulku  $G$ :ssä  $x$ :stä  $y$ :hyn ja olkoon  $\bar{y} = (y_0, \dots, y_m)$  kulku  $y$ :stä  $x$ :ään. Tällöin  $\bar{x} \star \bar{y}$  on pisteestä  $x$  lähtevä kierros, joka käy pisteessä  $y$ .

$C \implies B$ : Tämä implikaatio on triviaalisti voimassa.

$B \implies A$ : Oletetaan, että ehto B on voimassa. Lemman I 4.1 nojalla  $G$ :ssä on tällöin pisteestä  $x$  lähtevä kierros  $(z_0, \dots, z_n)$ , joka käy pisteessä  $y$ . Olkoon luvulle  $k \in [n]$  voimassa  $z_k = y$ . Tällöin jono  $(z_0, \dots, z_k)$  on kulku  $G$ :ssä pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ . Aivan vastaavasti näemme, että  $G$ :ssä on kulku pisteestä  $y$  pisteeseen  $x$ . Olemme näyttäneet ehdon A olevan voimassa.  $\square$

Olkoon  $\bar{x}$  kulku suhteikossa  $G$ . Kulun  $\bar{x}$  määrittämä suhteikko on se  $G$ :n alisuhteikko  $H$ , joka määräytyy ehdoista  $P_H = P(\bar{x})$  ja  $N_H = N(\bar{x})$ . Kulut liittyvät (vahvaan) yhtenäisyyteen seuraavan huomion kautta.

**I 4.5 Lemma** *Kulun (kierroksen) määrittämä suhteikko on (vahvasti) yhtenäinen.*

**Todistus.** Olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  kulku suhteikossa  $G$ . Merkitsemme  $H$ :lla kulun  $\bar{x}$  määrittämää suhteikkoa. Olkoon  $\emptyset \neq P \subsetneq P_H$ . Merkitsemme  $Q = P_H \setminus P$ .

Jos on voimassa  $x_0 \in P$ , niin merkitsemme  $j$ :llä pienintä lukua  $i \in [n]$ , jolla  $x_i \in Q$ ; tällöin  $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$  on  $H$ :n nuoli joukosta  $P$ .

Vastaavasti, jos  $x_0 \in Q$ , niin merkitsemme  $j$ :llä pienintä lukua  $i \in [n]$ , jolla  $x_i \in P$ ; tällöin  $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$  on  $H$ :n nuoli joukkoon  $P$ .

Oletamme, että  $\bar{x}$  on kierros ja tarkastelemme jälleen kahta tapausta.

Jos on voimassa  $x_0 \in P$ , niin merkitsemme  $j$ :llä ( $k$ :lla) pienintä (suurinta) lukua  $i \in [n]$ , jolla  $x_i \in Q$ ; tällöin  $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$  on  $H$ :n nuoli joukosta  $P$ ; lisäksi, koska  $x_n = x_0$ , on voimassa  $k < n$  ja  $\overrightarrow{x_kx_{k+1}}$  on  $H$ :n nuoli joukkoon  $P$ .

Lopuksi, jos  $x_0 \in Q$ , niin merkitsemme  $j$ :llä ( $k$ :lla) pienintä (suurinta) lukua  $i \in [n]$ , jolla  $x_i \in P$ ; tällöin  $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$  on  $H$ :n nuoli joukkoon  $P$ ; lisäksi, koska  $x_n = x_0$ , on voimassa  $k < n$  ja  $\overrightarrow{x_kx_{k+1}}$  on  $H$ :n nuoli joukosta  $P$ .

Edellä esitetystä seuraa, että  $H$  on yhtenäinen ja että  $H$  on vahvasti yhtenäinen, mikäli  $\bar{x}$  on kierros. □

Luonnehdimme nyt suhteikon vahvaa yhtenäisyyttä kulkujen olemassaolon avulla.

**I 4.6 Lause** *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä suhteikolle  $G$ :*

A.  $G$  on vahvasti yhtenäinen.

B. Kun  $x$  ja  $y$  ovat  $G$ :n pisteitä, niin  $G$ :ssä on kulku  $x$ :stä  $y$ :hyn ja kulku  $y$ :stä  $x$ :ään.

C. Kun  $x$  ja  $y$  ovat  $G$ :n pisteitä, niin  $G$ :ssä on kierros, joka käy pisteissä  $x$  ja  $y$ .

D.  $G$ :ssä on kierros, joka käy jokaisessa  $G$ :n pisteessä.

**Todistus.** Ehdot B ja C ovat Lemman I 4.4 nojalla keskenään yhtäpitävät. Lauseen todistamiseksi riittää näinollen näyttää, että  $A \implies B$  ja  $C \implies D \implies A$ .

$A \implies B$ : Oletamme, että  $G$  on vahvasti yhtenäinen. Osoitamme, että ehto B on voimassa. Teemme vastaväitteen: on olemassa sellaiset  $G$ :n pisteet  $x$  ja  $y$ , että  $x \neq y$  ja  $G$ :ssä ei ole kulkua pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ . Merkitsemme  $P = \{z \in P_G : G$ :ssä on kulku  $x$ :stä  $z$ :aan  $\}$ . Tällöin  $x \in P$  ja  $y \notin P$ , joten  $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$ . Koska  $G$  on vahvasti yhtenäinen, niin  $G$ :ssä on nuoli joukosta  $P$ . Olkoon  $\overrightarrow{z\bar{u}}$  sellainen  $G$ :n nuoli, että  $z \in P$  ja  $u \notin P$ . Koska  $z \in P$ , on  $G$ :ssä kulku  $(x_0, \dots, x_n)$  pisteestä  $x$  pisteeseen  $z$ . Mutta nyt  $(x_0, \dots, x_n, u)$  on kulku  $G$ :ssä, koska  $x_n = z$  ja  $\overrightarrow{z\bar{u}} \in N_G$ ; tämä on kuitenkin ristiriidassa sen kanssa, että  $u \notin P$ . Vastaväite johti ristiriitaan eikä siis voi pitää paikkaansa. Näin ollen ehto B on voimassa.



$C \implies D$ : Oletamme, että ehto  $C$  toteutuu. Olkoon  $a$   $G$ :n piste. Esitämme  $G$ :n pisteiden joukon muodossa  $P_G = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Ehdon  $C$  voimassaolosta ja Lemman I 4.1 tuloksesta seuraa, että jokaisella  $i \leq n$ , suhteikossa  $G$  on pisteestä  $a$  lähtevä kierros  $\bar{x}_i$ , joka käy pisteessä  $p_i$ . Nyt  $\bar{x}_1 \star \bar{x}_2 \star \dots \star \bar{x}_n$  on sellainen kierros  $G$ :ssä, joka käy jokaisessa  $G$ :n pisteessä.

$D \implies A$ : Oletamme, että  $G$ :ssä on sellainen kierros  $\bar{x}$ , joka käy jokaisessa  $G$ :n pisteessä. Merkitsemme  $H$ :lla kierroksen  $\bar{x}$  määrittämää suhteikkoa. Edellisen lemmän nojalla  $H$  on vahvasti yhtenäinen; tästä seuraa, koska  $H$  on  $G$ :n alisuhteikko ja  $P_H = P_G$ , että myös  $G$  on vahvasti yhtenäinen.  $\square$

**Korollaari** Suhteikon  $G$  pisteen  $x$  vahvasti yhtenäinen komponentti on joukon

$$\{y \in P_G : G\text{:ssä on kulku } x\text{:stä } y\text{:hyn ja kulku } y\text{:stä } x\text{:ään}\}$$

virittämä  $G$ :n alisuhteikko.

**Todistus.** Merkitsemme kyseistä joukkoa  $A$ :lla ja merkitsemme

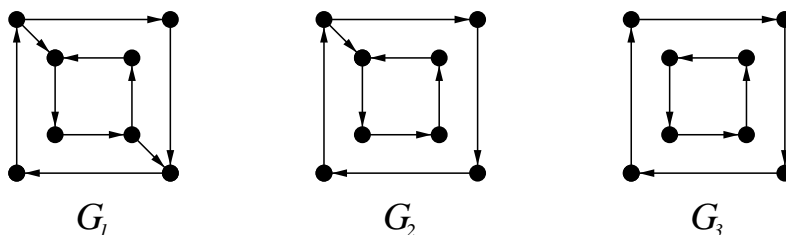
$$K = \{\bar{x} : \bar{x} \text{ on pisteestä } x \text{ lähtevä kierros } G\text{:ssä}\}.$$

Lemmojen 4.1(c) ja 4.4 nojalla on voimassa  $A = \bigcup_{\bar{x} \in K} P(\bar{x})$ . Merkitsemme jokaisella  $\bar{x} \in K$ ,  $H(\bar{x})$ :llä kierroksen  $\bar{x}$  määrittämää  $G$ :n alisuhteikkoa; Lemman I 4.5 nojalla  $H(\bar{x})$  on vahvasti yhtenäinen. Merkitsemme  $\mathcal{H} = \{H(\bar{x}) : \bar{x} \in K\}$ . Koska jokaisella  $H \in \mathcal{H}$  on voimassa  $x \in P_H$ , Lemman I 3.6 tuloksesta seuraa, että suhteikko  $\bigvee \mathcal{H}$  on vahvasti yhtenäinen. Koska suhteikko  $\bigvee \mathcal{H}$  on  $G$ :n vahvasti yhtenäinen alisuhteikko, jolle pätee, että  $P_{\bigvee \mathcal{H}} = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} P_H = \bigcup_{\bar{x} \in K} P(\bar{x}) = A$ , niin myös  $A$ :n virittämä  $G$ :n alisuhteikko  $J$  on vahvasti yhtenäinen.

Olkoon  $C$  pisteen  $x$  vahvasti yhtenäinen komponentti suhteikossa  $G$ . Koska  $x \in A = P_J$ , niin Lemman I 3.7 nojalla on voimassa  $J \prec C$ ; täten on voimassa  $A = P_J \subset P_C$ . Toisaalta, koska  $C$  on vahvasti yhtenäinen, niin Lauseesta I 4.6 seuraa, että  $P_C \subset A$ . Edellä esitetyn nojalla pätee, että  $P_C = A$ ; tästä seuraa Lemman I 3.5 nojalla, että  $C = J$ .  $\square$

**Esimerkki** Alla suhteikossa  $G_1$  voidaan mistä tahansa pisteestä kulkea mihin tahansa muuhun pisteeseen ja  $G_1$  on siis vahvasti yhtenäinen. Suhteikot  $G_2$  ja  $G_3$  eivät ole vahvasti yhtenäisiä: suhteikossa  $G_2$  on jokaisesta ulomman neliön pisteestä

kulku jokaiseen muuhun suhteikon pisteeseen, mutta mistään sisemmän neliön pisteestä ei ole kulkua mihinkään ulomman neliön pisteeseen;  $G_3$ :ssa puolestaan ei ole yhtään kulkua jommankumman neliön pisteestä toisen neliön pisteeseen. Sekä  $G_2$ :ssa että  $G_3$ :ssa on samat vahvasti yhtenäiset komponentit, jotka ovat  $G_3$ :n esityksessä näkyvät kaksi “erillistä osaa”.



Suhteikon yhtenäisyyttä ei voida luontevasti karakterisoida suhteikon kulkujen avulla, mutta niiden avulla voidaan antaa eräitä riittäviä ehtoja yhtenäisyydelle.

**Määritelmä** Suhteikon  $G$  piste  $x$  on  $G$ :n *juuri*, mikäli  $x$ :stä on kulku jokaiseen muuhun  $G$ :n pisteeseen.

Lauseen I 4.6 nojalla suhteikko  $G$  on vahvasti yhtenäinen jos ja vain jos jokainen  $G$ :n piste on  $G$ :n juuri;  $G$ :n yhtenäisyydelle riittää pelkkä yhden juuren olemassaolo.

**Lause** Jos suhteikolla on juuri, niin suhteikko on yhtenäinen.

**Todistus.** Tämä seuraa Lemmojen I 4.5 ja I 3.6 tuloksista.  $\square$

Panemme merkille, että aikaisempien tulosten nojalla saamme seuraavan lauseen.

**I 4.7 Lause** Merkitään  $J$ :llä suhteikon  $G$  juurten joukkoa. Tällöin  $G$ :ssä ei ole nuolta joukkoon  $J$ . Jos  $J \neq \emptyset$ , niin joukon  $J$  virittämä  $G$ :n alisuhteikko on  $G$ :n vahvasti yhtenäinen komponentti.

**Todistus.** Harjoitustehtävä.  $\square$

**Esimerkki** Edellisen esimerkin suhteikon  $G_2$  juurten joukko koostuu “ulomman neliön” pisteistä ja “ulompi neliö” on toinen  $G_2$ :n kahdesta vahvasti yhtenäisestä komponentista.

Tarkastelemme nyt kulkuja verkoissa. Jos  $(x_0, \dots, x_n)$  on kulku verkossa  $G$ , niin jokaisella  $i \in [n]$   $G$ :ssä on nuoli  $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$  ja täten myös nuoli  $\overrightarrow{x_ix_{i-1}}$ ; tästä seuraa, että myös jono  $(x_n, \dots, x_0)$  on kulku verkossa  $G$  ja tästä puolestaan seuraa, että jono  $(x_0, \dots, x_n) \star (x_n, \dots, x_0)$  on kierros verkossa  $G$ . Edellisen nojalla verkon  $G$  pisteille  $x$  ja  $y$  pätee, että  $G$ :ssä on kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$  jos ja vain jos  $G$ :ssä on kulku pisteestä  $y$  pisteeseen  $x$ .

Edellä tehtyjen huomioiden ja Lauseen I 4.6 avulla voimme johtaa verkon  $G$  yhtenäisyydelle seuraavat luonnehdinnat.

**I 4.8 Lause** *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät verkolle  $G$ :*

A.  $G$  on yhtenäinen.

B. Kaikilla  $x, y \in P_G$ ,  $G$ :ssä on kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ .

C. On olemassa sellainen piste  $a \in P_G$ , että jokaisella  $x \in P_G$ ,  $G$ :ssä on kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $a$ .

D.  $G$ :ssä on kulku, joka käy jokaisessa  $G$ :n pisteessä.

**Todistus.** Koska verkko  $G$  on yhtenäinen jos ja vain jos  $G$  on vahvasti yhtenäinen, niin Lauseen I 4.6 tuloksesta seuraa, että ehdot A, B ja D ovat keskenään yhtäpitävät. Implikaatio  $B \implies C$  on triviaalisti voimassa. Täten lauseen todistamiseksi riittää näyttää, että  $C \implies B$ .

$C \implies B$ : Oletamme, että ehto C on voimassa. Olkoot  $x$  ja  $y$   $G$ :n pisteitä. Osoitamme, että  $G$ :ssä on kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ . Oletuksen nojalla  $G$ :ssä on kulku  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  pisteestä  $x$  pisteeseen  $a$  ja kulku  $\bar{y} = (y_0, \dots, y_m)$  pisteestä  $y$  pisteeseen  $a$ . Koska  $G$  on verkko, jono  $\tilde{y} = (y_m, \dots, y_0)$  on kulku  $G$ :ssä. Kulut  $\bar{x}$  ja  $\tilde{y}$  ovat peräkkäiset, joten jono  $\bar{x} \star \tilde{y}$  on kulku  $G$ :ssä; selvästikin tämä on kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ .  $\square$

Luonnehdimme lopuksi suhteikon kahden pisteen välisen kulun olemassaoloa suhteikon relaation avulla.

**I 4.9 Lemma** *Olkoon  $G = (X, R)$  suhteikko, olkoot  $x$  ja  $y$   $G$ :n pisteitä ja olkoon  $n$  luonnollinen luku. Tällöin  $G$ :ssä on  $n$ -askeleinen kulku  $x$ :stä  $y$ :hyn jos ja vain jos  $x \in R^n\{y\}$ .*

**Todistus.** Merkitsemme  $K_n = \{z \in X : G\text{:ssä on } n\text{-askeleinen kulku } z\text{:sta } y\text{:hyn}\}$  ja osoitamme induktiolla luvun  $n$  suhteen, että  $K_n = R^n\{y\}$ .

Jos  $n = 0$ , niin  $K_n = \{y\} = R^n\{y\}$ .

Olkoon  $n$  sellainen luonnollinen luku, että  $n > 0$  ja  $K_{n-1} = R^{n-1}\{y\}$ . Tällöin  $K_n = R^n\{y\}$ , sillä induktio-oletusta hyväksikäyttäen näemme jokaisella  $z \in X$  olevan voimassa

$$\begin{aligned} z \in K_n &\iff \exists \text{ sellainen } G\text{:n kulku } (x_0, \dots, x_n), \text{ että } x_0 = z \text{ ja } x_n = y \\ &\iff \exists \text{ sellainen } G\text{:n kulku } (x_1, \dots, x_n), \text{ että } x_n = y \text{ ja } \overline{zx_1} \subset R \\ &\iff \exists \text{ sellainen } x_1 \in R^{n-1}\{y\}, \text{ että } z \in R\{x_1\} \\ &\iff z \in R(R^{n-1}\{y\}) \\ &\iff z \in R^n\{y\}. \quad \square \end{aligned}$$

**I 4.10 Korollaari** *Suhteikossa  $G = (X, R)$  on kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$  jos ja vain jos  $x \in R^\infty\{y\}$ .*

## 5. HAMILTONIN KULUT.

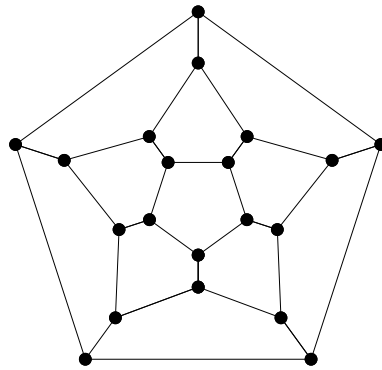
Näimme edellä, että jokaisessa vahvasti yhtenäisessä suhteikossa on kulku (itse asiassa kierros), joka käy jokaisessa suhteikon pisteessä. Seuraavaksi tarkastelemme sellaisia suhteikkoja, joissa on kulku tai kierros, joka käy jokaisessa suhteikon pisteessä täsmälleen yhden kerran.

**Määritelmä** Olkoon  $G$  suhteikko. *Hamiltonin kulku*  $G$ :ssä on yksinkertainen kulku  $G$ :ssä, joka käy jokaisessa  $G$ :n pisteessä.

*Hamiltonin kierros*  $G$ :ssä on suljettu Hamiltonin kulku.

“Hamiltonin kulut” ovat saaneet nimensä irlantilaisen matemaatikon W.R. Hamiltonin mukaan, joka ensimmäisenä eksplisiittisesti tutki näitä kulkuja. Hamilton osoitti, että jokaisessa avaruuden säännölliseen monitahokkaaseen liittyvässä verkossa (kuten Luvussa I 1 mainituissa kuutioon ja säännölliseen 12-tahokkaaseen liittyvissä verkoissa) on Hamiltonin kulku; v. 1856 hän esitti “pelin”, joka perustui erilaisten Hamiltonin kierrosten etsimiseen säännölliseen 12-tahokkaaseen liittyvästä verkosta

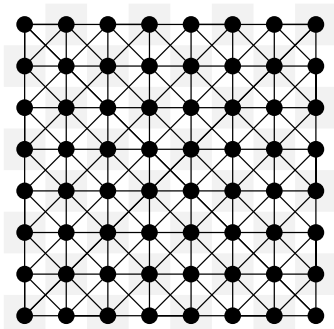
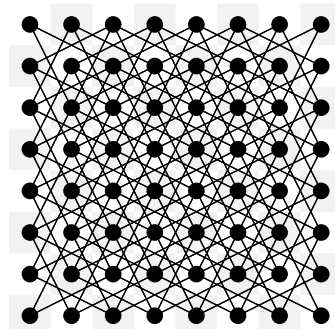
ja hän onnistui jopa kauppaamaan pelin lelutehtailijalle. Kun esitetään säännöllinen dodekaedri sopivan tasoprojektion avulla, niin siihen liittyvä verkko saa seuraavanlaisen esityksen, josta näkyy helposti, että verkossa on Hamiltonin kierros.



**Harjoitustehtävä.** Osoita, että yllä kuvatussa verkossa on Hamiltonin kierros.

“Hamiltonin kulkuja” oli kuitenkin erilaisissa konkreettisissä yhteyksissä tarkasteltu jo paljon ennen Hamiltonia. Esimerkiksi eräät ikivanhat shakkipelin eri nappuloiden liikkeisiin liittyvät ongelmat voidaan palauttaa Hamiltonin kulkujen etsimiseen nappuloiden siirtojen määräämistä verkoista.

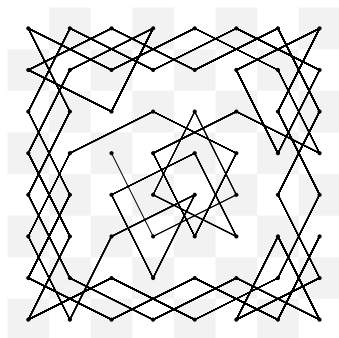
**Esimerkki** Tarkastelemme jälleen shakkipelin kuninkaaseen ja hevoseen liittyviä verkkoja (katso Esimerkkiä I 2.5):

 $K$  $H$ 

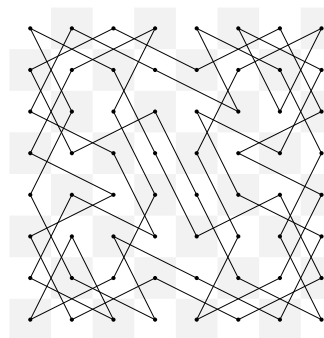
On triviaalia, että verkossa  $K$  on Hamiltonin kulku ja lukija voi aivan helposti myös löytää  $K$ :sta Hamiltonin kierroksen. Paljon mielenkiintoisempi ongelma on se, onko verkossa  $H$  Hamiltonin kulkua tai kierrosta. Tämä ongelma on ikivanha, mutta se tunnetaan kuitenkin usein “Eulerin ongelman” nimellä, koska suuri 1700-luvun matemaatikko Leonard Euler oli ensimmäinen, joka tarkasteli ongelmaa matemaattiselta kannalta; hän julkaisi siitä kirjoitelman “Ratkaisu erääseen kiinnostavaan ongelmaan, jonka tutkiminen näyttää mahdottomalta”.

Myös verkossa  $H$  on Hamiltonin kierros. Hamiltonin kulkua verkossa  $H$  kutsutaan “ratsun marssiksi”. Näitä ratsun marsseja on löytynyt tuhansia ja kiinnostavimpia ovat sellaiset, joilla on joitakin säännönmukaisuusominaisuuksia. Lukija voi helposti itsekin konstruoida ratsun marsseja valitsemalla aloitusruudun mielivaltaisesti ja soveltamalla sen jälkeen joka askeleella nk. Warnsdorfin sääntöä: seuraavaksi siirrytään sellaiseen ruutuun, josta on pienin mahdollinen määrä siirtoja “vapaisiin” ruutuihin; sääntö voi tosin joskus (harvoin) johtaa umpikujaan, mutta yleensä se toimii halutulla tavalla.

Seuraavassa kuvassa on vasemmalla esitetty yksi (Warnsdorfin säännön avulla konstruoitu) ratsun marssi piirtämällä kulun askelina olevat viivat näkyviin; kuva ei määrää “kulkusuuntaa”, mutta valitsemalla “lähtöpiste” saadaan viivoja seuraamalla määrättyksi ratsun marssi. Keskellä on esitetty yksi ratsun marssi numeroimalla shakikaudan ruudut ratsun kulun määräämässä järjestyksessä; tämän marssin on löytänyt viime vuosisadan venäläinen shakinpelaaja Janisch ja sillä on se hämmästyttävä lisäominaisuus, että ruutujen numerointi antaa “puolittaisen taikaneliön”: jokaisen vaakarivin numeroiden summa on sama luku (260) ja jokaisen pystyrivin numeroiden summa on sama luku (260); ei ole tunnettua, onko olemassa sellaista ratsun marssia, joka antaisi “oikean” taikaneliön (jolloin myös kummankin päähalkaisijan numeroiden summa on sama “maaginen” luku 260). Alla oikealla on esitetty Janischin keksimän marssin kulku piirtämällä sen määräämät viivat näkyviin; tästä esityksestä näkee, että marssilla on “puolimaagisuuden” lisäksi muitakin säännönmukaisuus- ja symmetriaominaisuuksia.



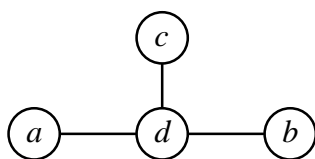
50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18



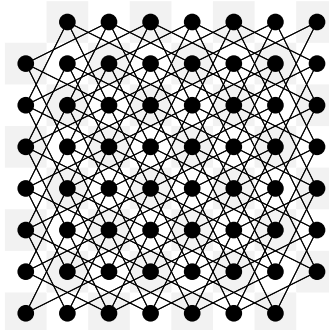
Jos  $\bar{x}$  on Hamiltonin kulku suhteikossa  $G$ , niin  $\bar{x}$  on myös Hamiltonin kulku suhteikossa  $G^s$ ; tästä seuraa, että suhteikko  $G^s$  on yhtenäinen ja näin muodoin,

Lauseen I 3.3 nojalla, suhteikko  $G$  on yhtenäinen. Toisaalta, jos  $\bar{x}$  on  $G$ :n Hamiltonin kierros, niin Lauseen I 4.6 tuloksesta seuraa, että  $G$  on vahvasti yhtenäinen. Vahva yhtenäisyyskään ei ole riittävä ehto Hamiltonin kulun olemassaololle.

**I 5.2 Esimerkkejä** (a) Alla kuvattu verkko on yhtenäinen ja täten vahvasti yhtenäinen, mutta siinä ei ole Hamiltonin kulkua, koska jokainen kulku, joka käy kaikissa verkon pisteissä, käy ainakin kaksi kertaa verkon “keskipisteessä”  $d$ .



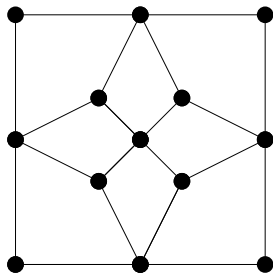
(b) Poistetaan shakkilaudan ruudukosta kaksi vastakkaista kulmaruutua ja tarkastellaan tämän typistetyn ruudukon virittämää hevosen liikkeiden määräämän verkon  $H$  aliverkkoa  $H'$ :



Osoitetaan, ettei verkossa  $H'$  ole Hamiltonin kulkua, toisin sanoen, ettei typistetystä ruudukosta ole hevosen marssia.

**Ratkaisu:** Hevosen liikkua ruudun väri vaihtuu jokaisella siirrolla. Täten, jos verkossa  $H'$  olisi Hamiltonin kulku, niin valkoisten ja mustien ruutujen lukumäärät voisivat erota toisistaan korkeintaan yhdellä (jos kulku olisi kierros, niin lukumäärien olisi oltava samat). Koska yllä kuvatussa typistetystä ruudukossa on 32 mustaa ruutua ja 30 valkoista ruutua, niin siihen liittyvässä verkossa  $H'$  ei voi olla Hamiltonin kulkua.

(c) Edellisessä esimerkissä käytetty päättely on usein käyttökelpoinen Hamiltonin kulkuihin liittyvissä tarkasteluissa. Annetaan sen käytöstä toinenkin esimerkki osoittamalla, ettei alla kuvatussa verkossa ole Hamiltonin kulkua.



**Ratkaisu:** Merkitään kyseistä verkkoa  $G$ :llä. Verkossa  $G$  on viisi pistettä, joiden aste on neljä; merkitään näiden viiden pisteen joukkoa  $A$ :lla ja merkitään joukkoa  $P_G \setminus A$   $B$ :llä. Pannaan merkille, etteivät mitkään kaksi joukon  $A$  pistettä ole vierekkäin  $G$ :ssä eivätkä mitkään kaksi joukon  $B$  pistettä ole vierekkäin  $G$ :ssä; tästä seuraa, että jos  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  on kulku  $G$ :ssä, niin jokaisella  $i \in [n]$  on voimassa  $x_i \in A \iff x_{i-1} \in B$  ja tästä seuraa edelleen, että joukkojen  $\{i \leq n : x_i \in A\}$  ja  $\{i \leq n : x_i \in B\}$  alkioden lukumäärät voivat erota toisistaan korkeintaan yhdellä. Koska on voimassa  $|A| = 5$  ja  $|B| = 8$ , niin edellisestä seuraa, ettei mikään yksinkertainen kulku verkossa  $G$  voi kulkea kaikkien  $G$ :n pisteiden kautta.

Yleensä on vaikeaa päätellä onko annetussa suhteikossa tai annetussa verkossa Hamiltonin kulkua. Tunnetaan kyllä monia suhteellisen yksinkertaisia riittäviä ehtoja Hamiltonin kulun olemassaololle, mutta yksinkertaisia välttämättömiä ja riittäviä ehtoja ei ole löytynyt. Ei myöskään tunneta mitään “tehokkaita” algoritmeja, joiden avulla voitaisiin selvittää onko annetussa suhteikossa Hamiltonin kulkua vai ei.

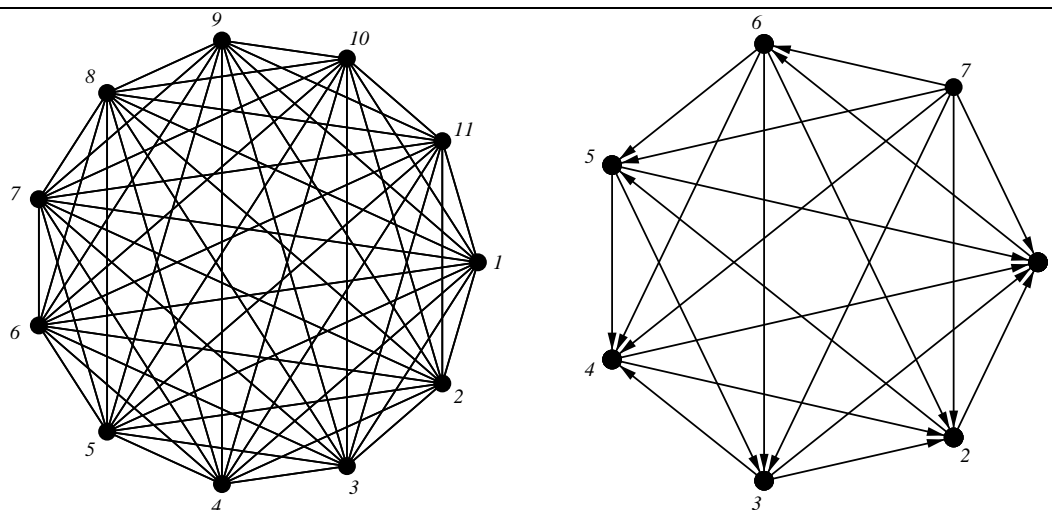
Annetaan nyt eräs riittävä ehto Hamiltonin kulun olemassaololle.

**Määritelmä** Suhteikko  $G$  on *täydellinen*, mikäli kaikilla  $x, y \in P_G$ , jos  $x \neq y$ , niin  $G$ :ssä on joko nuoli  $\overrightarrow{xy}$  tai nuoli  $\overrightarrow{yx}$ .

*Täydellinen verkko* eli täydellinen suhteikko, joka on verkko, on hyvin yksinkertaista muotoa: jos täydellisen verkon  $G$  pistejoukko on  $X$ , niin  $G$ :n viivojen joukko on  $\{\overrightarrow{xy} : x, y \in X, x \neq y\}$ . Täydellistä verkkoa, jonka pistejoukko on  $X$ , merkitään symbolilla  $K_X$ . Verkolle  $K_{[n]}$ , missä  $n \in \mathbb{N}$ , käytetään lyhennettyä merkintää  $K_n$ . Selvästikin, jos  $|X| = n$ , niin verkko  $K_X$  on isomorfinen verkon  $K_n$  kanssa.

Seuraavassa kuvassa on vasemmalla kuvattu verkko  $K_{11}$  ja oikealla eräs täydellinen suhteikko, jonka pisteiden joukko on  $[7]$ .





On triviaalia, että täydellisessä verkossa on Hamiltonin kulku. Osoitetaan nyt, että myös jokaisessa täydellisessä suhteikossa on Hamiltonin kulku. Todistetaan ensin eräs aputuloks.

**I 5.3 Lemma** *Olkoon  $G$  täydellinen suhteikko, olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  kulku  $G$ :ssä ja olkoon  $u$  sellainen  $G$ :n piste, joka ei kuulu joukkoon  $P(\bar{x})$ . Tällöin on olemassa sellainen  $0 \leq j \leq n + 1$ , että jono  $\bar{z} = (z_0, \dots, z_{n+1})$ , missä  $z_i = x_i$  kun  $i < j$ ,  $z_j = u$  ja  $z_i = x_{i-1}$  kun  $i > j$ , on kulku suhteikossa  $G$ .*

**Todistus.** Jos  $G$ :ssä on nuoli  $\overrightarrow{ux_0}$ , niin voimme valita  $j = 0$  ja jos  $G$ :ssä on nuoli  $\overrightarrow{x_n u}$ , niin voimme valita  $j = n + 1$ .

Oletamme, ettei  $G$ :ssä ole nuolta  $\overrightarrow{ux_0}$  eikä nuolta  $\overrightarrow{x_n u}$ . Koska  $G$  on täydellinen, niin  $G$ :ssä on tällöin nuolet  $\overrightarrow{x_0 u}$  ja  $\overrightarrow{u x_n}$ . Merkitseme  $k$ :llä epätyhjän joukon  $A = \{i \in [n] : \overrightarrow{x_i u} \in N_G\}$  suurinta lukua ja panemme merkille, että  $1 \leq k < n$ . Osoitamme, että luvulla  $j = k + 1$  on lemmassa vaadittu ominaisuus. Määrittelemme jonon  $\bar{z}$  kuten lemmassa. Koska  $1 < j < n + 1$  ja koska jono  $(x_0, \dots, x_n)$  on kulku  $G$ :ssä, niin näemme, että jono  $\bar{z}$  on kulku  $G$ :ssä, mikäli  $G$ :ssä on nuolet  $\overrightarrow{x_{j-1} u}$  ja  $\overrightarrow{u x_j}$ . Koska  $j - 1 = k$  ja  $k \in A$ ,  $G$ :ssä on nuoli  $\overrightarrow{x_{j-1} u}$ . Luvun  $k$  maksimaalisuudesta seuraa, että  $k + 1 \notin A$  eli  $j \notin A$ . Täten  $G$ :ssä ei ole nuolta  $\overrightarrow{x_j u}$ ; tästä seuraa  $G$ :n täydellisyysden nojalla, että  $G$ :ssä on nuoli  $\overrightarrow{u x_j}$ .  $\square$

**I 5.4 Lause** *Jokaisessa täydellisessä suhteikossa on Hamiltonin kulku.*

**Todistus.** Olkoon  $G$  epätyhjä täydellinen suhteikko. Merkitsemme  $n$ :llä suurinta lukua  $k$ , jolla on olemassa sellainen kulku  $\bar{z} = (z_0, \dots, z_k)$  suhteikossa  $G$ , että  $|P(\bar{z})| =$

$k + 1$ ; panemme merkille, että  $0 \leq n < |P_G|$ . Olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  sellainen kulku  $G$ :ssä, että  $|P(\bar{x})| = n$ . Osoitamme, että  $P(\bar{x}) = P_G$ . Teemme vastaväitteen: on olemassa  $u \in P_G \setminus P(\bar{x})$ . Edellisen lemmän nojalla on olemassa sellainen kulku  $\bar{z} = (z_0, \dots, z_{n+1})$   $G$ :ssä, että  $P(\bar{z}) = P(\bar{x}) \cup \{u\}$ . Koska  $|P(\bar{x})| = n + 1$  ja  $u \notin P(\bar{x})$ , on voimassa  $|P(\bar{z})| = n + 2$ . Tämä on ristiriidassa luvun  $n$  maksimaalisuuden kanssa. Täten vastaväite on väärä ja on voimassa  $P(\bar{x}) = P_G$ . Koska  $|P(\bar{x})| = n + 1$ , kulku  $\bar{x}$  on yksinkertainen; näin ollen  $\bar{x}$  on Hamiltonin kulku.  $\square$

Jos  $(x_0, \dots, x_n)$  on Hamiltonin kulku suhteikossa  $G$ , niin piste  $x_0$  on selvästikin suhteikon  $G$  juuri. Täten saamme seuraavan tuloksen.

**Korollaari** *Jokaisella epätyhjällä täydellisellä suhteikolla on juuri.*

**Harjoitustehtävä.** Etsi Hamiltonin kulku edellä kuvatusta seitsemän pisteen täydellisestä suhteikosta. Onko suhteikossa Hamiltonin kierrosta?

Täydellisessä suhteikossa ei ole välttämättä Hamiltonin kierrosta, kuten nähdään esimerkiksi tarkastelemalla suhteikkoa  $H$ :  $P_H = \{1, 2\}$  ja  $N_H = \{\overline{12}\}$ . Edellä totesimme, että välttämätön ehto Hamiltonin kierroksen olemassaololle on suhteikon vahva yhtenäisyys; osoitamme nyt, että tämä välttämätön ehto on täydellisen suhteikon tapauksessa myös riittävä.

**I 5.5 Lause** *Täydellisessä suhteikossa on Hamiltonin kierros jos ja vain jos suhteikko on vahvasti yhtenäinen.*

**Todistus.** Olkoon  $H$  vahvasti yhtenäinen täydellinen suhteikko. Osoitamme, että  $H$ :ssa on Hamiltonin kierros. Tyhjä jono on tyhjän suhteikon Hamiltonin kierros, joten voimme olettaa, että  $H$  on epätyhjä suhteikko. Tällöin  $H$ :ssa on ainakin nolla-askelisia yksinkertaisia kierroksia ( $x$ ). Panemme merkille, että jos  $\bar{x}$  on yksinkertainen kierros  $H$ :ssa, niin  $\bar{x}$ :n askelten lukumäärä on korkeintaan sama kuin  $H$ :n pisteiden lukumäärä; tästä seuraa, että  $H$ :ssa on sellainen yksinkertainen kierros  $\bar{z} = (z_0, \dots, z_m)$ , että jokaisen muun  $H$ :n yksinkertaisen kierroksen askelten lukumäärä on korkeintaan  $m$ . Osoitamme, että  $\bar{z}$  on Hamiltonin kierros eli että  $P(\bar{z}) = P_H$ .

Teemme vastaväitteen:  $P(\bar{z}) \neq P_H$ . Merkitsemme  $P = P_H \setminus P(\bar{z})$ . Tällöin  $\emptyset \neq P \subsetneq P_H$ . Tarkastelemme kahta eri tapausta:

*Tapaus 1°.* Oletamme, että on olemassa sellainen joukon  $P$  piste  $p$  ja sellaiset joukon  $P(\bar{z})$  pisteet  $x$  ja  $y$ , että  $x \neq y$  ja  $H$ :ssa on nuolet  $\overrightarrow{x\bar{p}}$  ja  $\overrightarrow{p\bar{y}}$ . Lemman I 4.1(c)

nojalla voimme olettaa, että on voimassa  $x = z_0$ . Merkitsemme  $l$ :llä epätyhjän lukujoukon  $\{j \in [m] : \overrightarrow{pz_j} \in N_H\}$  pienintä lukua. Tällöin pätee, että  $\overrightarrow{z_{l-1}p} \in N_H$  ja  $\overrightarrow{pz_l} \in N_H$  ja tästä seuraa, että jono  $\bar{z}' = (z_0, \dots, z_{l-1}, p, z_l, \dots, z_m)$  on kulku  $H$ :ssa. Koska  $\bar{z}$  on kierros, niin myös  $\bar{z}'$  on kierros. Koska kierros  $\bar{z}$  on yksinkertainen ja  $p \notin P(\bar{z})$ , niin kierros  $\bar{z}'$  on yksinkertainen; tämä on kuitenkin ristiriidassa luvun  $m$  maksimaalisuuden kanssa sillä kierroksen  $\bar{z}'$  askelten lukumäärä on  $m + 1$ .

*Tapaus 2<sup>o</sup>.* Oletamme, ettei millään joukon  $P$  pisteellä  $p$  ole olemassa kahta joukon  $P(\bar{z})$  pistettä  $x$  ja  $y$ , joille olisi voimassa  $\overrightarrow{xp} \in N_H$  ja  $\overrightarrow{py} \in N_H$ . Tällöin suhteikon  $H$  täydellisyydestä seuraa, että on voimassa  $P = Q \cup R$ , missä  $Q = \{q \in P : \overrightarrow{xq} \in N_H \text{ jokaisella } x \in P(\bar{z})\}$  ja  $R = \{r \in P : \overrightarrow{ry} \in N_H \text{ jokaisella } y \in P(\bar{z})\}$ . Vahvan yhtenäisyyden nojalla  $H$ :ssä on nuoli joukosta  $P$  ja tästä seuraa, koska  $H$ :ssa ei ole nuolta joukosta  $Q$  joukkoon  $P(\bar{z}) = P_H \setminus P$ , että on voimassa  $R \neq \emptyset$ . Vahvan yhtenäisyyden nojalla  $H$ :ssa on nuoli  $\overrightarrow{ab}$ , missä  $a \notin R$  ja  $b \in R$ . Koska  $H$ :ssa ei ole nuolta joukosta  $P(\bar{z})$  joukkoon  $R$ , on voimassa  $a \in Q$ . Nyt  $(z_0, a, b, z_1, \dots, z_m)$  on  $m + 2$ -askeleinen yksinkertainen kierros  $H$ :ssa ja tämä on ristiriidassa luvun  $m$  maksimaalisuusominaisuuden kanssa.

Koska molemmat tapaukset johtivat ristiriitaan, vastaväite on väärä ja  $\bar{z}$  on Hamiltonin kierros  $H$ :ssa.  $\square$

Annamme lopuksi erään käyttökelpoisen riittävän (muttei välttämättömän) ehdon Hamiltonin kierroksen olemassaololle verkossa. Todistuksessa tarvitsemme seuraavaa apulausetta.

**I 5.6 Lemma** *Olkoon  $(x_0, \dots, x_n)$  Hamiltonin kulku verkossa  $H$ . Jos  $H$ :ssa ei ole Hamiltonin kierrosta, niin on voimassa  $d_H(x_0) + d_H(x_n) < p_H$ .*

**Todistus.** Oletamme, ettei  $H$ :ssa ole Hamiltonin kierrosta; panemme merkille, että tällöin  $\overrightarrow{x_0x_n} \notin V_H$ . Panemme myös merkille, että koska  $(x_0, \dots, x_n)$  on Hamiltonin kulku muttei kierros, niin  $p_H = n + 1$ . Merkitsemme  $A = \{i \in [n] : \overrightarrow{x_0x_i} \in V_H\}$  ja  $B = \{j \in [n] : \overrightarrow{x_nx_j} \in V_H\}$  ja panemme merkille, että  $d_H(x_0) = |A|$  ja  $d_H(x_n) = |B|$ . Jokaisella  $i \in A$  on voimassa  $i - 1 \notin B$ , sillä muussa tapauksessa jono

$$(x_0, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_1, x_0)$$

olisi Hamiltonin kierros verkossa  $H$ . Edellisen nojalla joukossa  $\{0, \dots, n\}$  on ainakin  $|A|$  alkia  $j$ , missä  $j < n$ , jotka eivät kuulu joukkoon  $B$ ; koska myöskään luku  $n$  ei kuulu joukkoon  $B$ , saamme epäyhtälön  $|B| < n + 1 - |A|$  eli  $d_H(x_0) + d_H(x_n) < p_H$ .

$\square$

**I 5.7 Lause** *Olkoon  $G$  sellainen verkko, jonka pisteiden lukumäärä on suurempi kuin kaksi ja jonka kaikille pisteille  $a \neq b$  pätee, että jos  $a$  ja  $b$  eivät ole vierekkäin  $G$ :ssä, niin  $d_G(a) + d_G(b) \geq p_G$ . Tällöin verkossa  $G$  on Hamiltonin kierros.*

**Todistus.** Merkitsemme

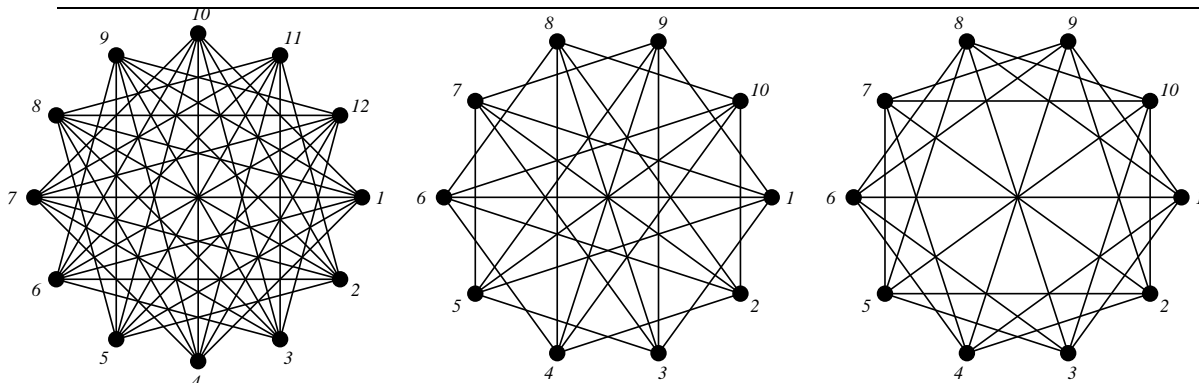
$$W = \{\overline{xy} : x, y \in P_H, x \neq y \text{ ja } \overline{xy} \notin V_H\}$$

ja esitämme joukon  $W$  muodossa  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Merkitsemme jokaisella  $0 \leq i \leq m$   $H_i$ :llä ehtojen  $P_{H_i} = P_G$  ja  $V_{H_i} = V_G \cup \{v_j : j \in [i]\}$  määräämää verkkoa. Panemme merkille, että  $H_0 = G$  ja  $H_m$  on täydellinen verkko.

Täydellisessä verkossa  $H_m$  on enemmän kuin kaksi pistettä ja täten  $H_m$ :ssä on Hamiltonin kierros. Osoitamme, että myös verkossa  $H_0 = G$  on tällainen kierros. Teemme vastaväitteen:  $H_0$ :ssa ei ole Hamiltonin kierrosta. Merkitsemme  $k$ :lla lukujoukon  $\{i \in [m] : H_i\text{:ssä on Hamiltonin kierros}\}$  pienintä lukua ja merkitsemme edelleen  $H_{k-1} = H$ ,  $H_k = J$  ja  $v_k = v$ . Tällöin verkossa  $J$  on Hamiltonin kierros, mutta verkossa  $H$  ei ole. Osoitamme, että verkossa  $H$  on Hamiltonin kulku. Olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_t)$  Hamiltonin kierros verkossa  $J$ . Koska  $P_H = P_J$  ja  $V_H = V_J \setminus \{v\}$ , on jollain  $i \in [t]$  oltava voimassa  $\overline{x_{i-1}x_i} = v$ : muussa tapauksessa  $\bar{x}$  olisi Hamiltonin kierros myös verkossa  $H$ . Lemman I 3.1(c) nojalla voimme olettaa, että on voimassa  $\overline{x_0x_1} = v$ . Kierroksen  $\bar{x}$  yksinkertaisuudesta seuraa nyt, että jokaisella  $1 < i \leq n$  on voimassa  $\overline{x_{i-1}x_i} \neq v$  ja tästä seuraa, että jono  $\bar{x}' = (x_1, \dots, x_n)$  on kulku verkossa  $H$ ; jono  $\bar{x}'$  on Hamiltonin kulku, koska on voimassa  $x_n = x_0$  ja täten  $\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_0, \dots, x_n\}$ . Edellisen lemmän nojalla on voimassa  $d_H(x_1) + d_H(x_m) < p_H$ . Koska  $G$  on  $H$ :n aliverkko ja  $P_G = P_H$ , niin edellisestä seuraa, että  $d_G(x_1) + d_G(x_m) < p_G$ ; tästä epäyhtälöstä seuraa kuitenkin ristiriita lauseen oletuksen kanssa, sillä pisteet  $x_1$  ja  $x_m$  eivät ole vierekkäin  $G$ :ssä, koska  $\overline{x_1x_m} = \overline{x_0x_1} = v = v_k$  ei ole  $G$ :n viiva.  $\square$

**I 5.8 Korollaari** *Verkossa  $G$  on Hamiltonin kierros, mikäli  $|P_G| > 2$  ja jokaisella  $x \in P_G$  on voimassa  $d_G(x) \geq \frac{1}{2}p_G$ .*

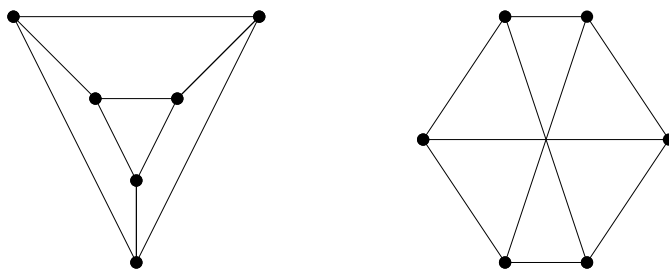
Edellisten tulosten nojalla voimme päätellä, että alla olevista verkoista löytyy Hamiltonin kierrokset:



**Harjoitustehtävä.** Etsi yllä kuvatuista verkoista Hamiltonin kierrokset.

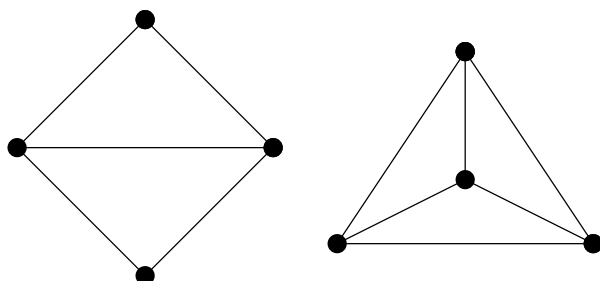
### HARJOITUSTEHTÄVIÄ LUKUUN I

1. Osoita, että verkot



eivät ole keskenään isomorfiset.

2. Osoita, että verkot



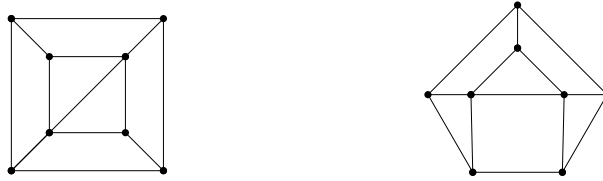
eivät ole keskenään isomorfiset.

3. Perustele kohdissa a) ja b) miksi annetut kaksi verkkoa eivät ole keskenään isomorfiset.

(a)



(b)



4. Olkoon  $S$  suhteikko, jolla on seuraajaluettelo

$$\begin{aligned} a : b c f \quad c : b d f \quad e : d e f \\ b : a d f \quad d : e f : \end{aligned}$$

Etsi  $S$ :n relaation matriisi sekä transitiivinen sulkeuma (katso tehtäviä I 3 ja I 10).

5. Piirrä verkko, jolla on seuraajaluettelo

$$\begin{aligned} a : b f g i \quad d : c e \quad g : a c j \quad j : g h i \\ b : a c \quad e : d f h i \quad h : c e j \\ c : b d g h \quad f : a e \quad i : a e j \end{aligned}$$

[Ohje: a,b,c,d,e,f reunalle, j keskelle.]

6. Etsi suhteikon  $S$ :

$$\begin{aligned} a : e \quad c : b \quad e : d \quad g : b \\ b : c f \quad d : a e \quad f : g \end{aligned}$$

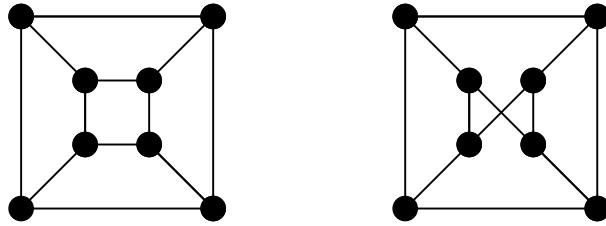
yhtenäiset komponentit.

7. Olkoon  $S$  suhteikko, jolla on seuraajaluettelo:

$$\begin{aligned} a : a e \quad b : c \quad c : b h \quad d : d \quad e : g \\ f : i \quad g : b \quad h : e h \quad i : d f \end{aligned}$$

Etsi  $S$ :n vahvasti yhtenäiset komponentit.

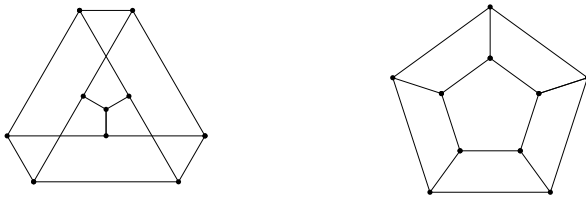
8. Verkko  $G$  on *kaksijakoinen* jos joukolla  $P_G$  on sellainen esitys  $P_G = A \cup B$ , etteivät mitkään kaksi joukon  $A$  pistettä ole vierekkäin  $G$ :ssä eivätkä mitkään kaksi joukon  $B$  pistettä ole vierekkäin  $G$ :ssä. Pane merkille, että jos kaksi verkkoa  $G$  ja  $H$  ovat keskenään isomorfiset, niin  $G$  on kaksijakoinen jos ja vain jos  $H$  on kaksijakoinen ja käytä tätä huomiota hyväksesi sen osoittamiseen, että alla kuvatut kaksi verkkoa eivät ole keskenään isomorfiset.



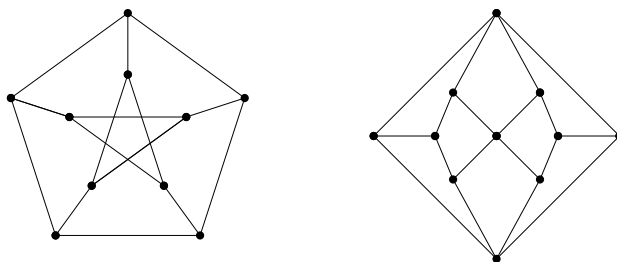
9. Olkoon  $\mathcal{Y}$  äärellinen perhe tasoon piirrettyjä ympyröitä. Merkitään  $G$ :llä verkkoa, jonka pistejoukon muodostavat ne alueet, joihin perheen  $\mathcal{Y}$  ympyrät jakavat tason ja jossa kahta aluetta yhdistää viiva silloin kun niiden reunojen leikkaukseen sisältyy (surkastumaton) ympyränkaari. Näytä, että verkko  $G$  on kaksijakoinen.

[Ohje: tarkastele niiden ympyröiden  $Y \in \mathcal{K}$  lukumäärää, joiden sisäpuolella alue  $A \in P_G$  on.]

10. Tutki ovatko seuraavat kaksi verkkoa keskenään isomorfiset:

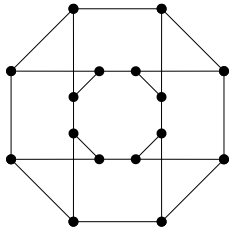


11. Näytä, että alla kuvatut verkot eivät ole keskenään isomorfiset. (Vasemmanpuoleinen verkko tunnetaan nimellä *Petersenin verkko* ja oikeanpuoleinen nimellä *Herschelin verkko*).

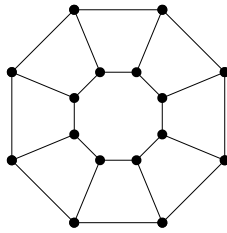


12. Osoita, että kahdessa edellisessä tehtävässä vasemmalla kuvatut verkot ovat isomorfisia ehtojen  $P_G = \mathcal{P}_2[5]$  ja  $V_G = \{\overline{AB} : A, B \in \mathcal{P}_2[5] \text{ ja } A \cap B = \emptyset\}$  määräämän verkon  $G$  kanssa.

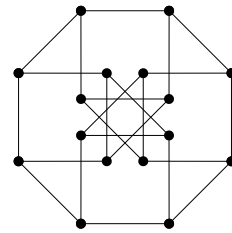
13. Onko verkko  $G$  isomorfinen verkon  $H$  tai verkon  $I$  kanssa? Perustele vastauksesi!



G



H



I

14. On käytettävissä kaksi eri väriä. Väritetään kuuden pisteen täydellisen verkon  $K_6$  jokainen viiva jommallakummalla värillä. Osoita, että näin väritetystä verkosta löytyy yksivärinen kolmio (toisin sanoen, löytyy kolme verkon pistettä  $a$ ,  $b$  ja  $c$  siten, että viivoilla  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$  ja  $\overline{ca}$  on kaikilla sama väri).

15. Näytä, että edellisen tehtävän johtopäätös ei päde verkossa  $K_5$ .

Verkon  $G$  *komplementti* on se verkko  $\tilde{G}$ , jolla on samat pisteet kuin  $G$ :llä ja jossa kahden eri pisteen  $x, y \in P_G$  välillä on viiva jos ja vain  $x:n$  ja  $y:n$  välillä ei ole viivaa  $G$ :ssä.

16. Osoita, että keskenään isomorfisten verkkojen komplementit ovat keskenään isomorfiiset.

17. Osoita, että on olemassa tasan kaksi keskenään epäisomorfista verkkoa, joissa on 5 pistettä ja 8 viivaa.

[Ohje: tarkastele komplementteja.]

18. Montako keskenään epäisomorfista 5-pisteistä ja 7-viivaista verkkoa on olemassa?

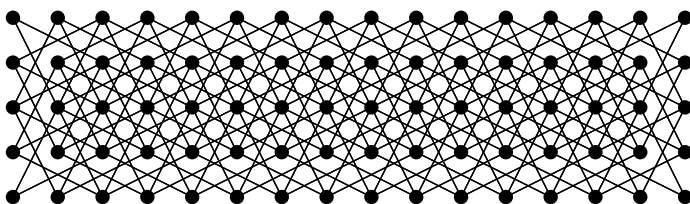
[Ohje: tarkastele komplementteja.]

19. Jos  $\mathcal{L}$  on äärellinen perhe joukkoja, niin merkitään  $G_{\mathcal{L}}$ :llä sitä verkkoa, jonka pisteiden joukkona on  $\mathcal{L}$  ja jonka viivojen joukko koostuu niistä viivoista  $\overline{AB}$ , missä  $A, B \in \mathcal{L}$ ,  $A \neq B$  ja  $A \cap B \neq \emptyset$ ; tällaista verkkoa  $G_{\mathcal{L}}$  kutsutaan *joukkoverkoksi*.

Osoita, että jokainen verkko on isomorfinen jonkun joukkoverkon kanssa.

[Ohje: Tarkastele joukkoja, jotka koostuvat niistä verkon viivoista, joilla on annettu verkon piste toisena päättepisteenä.]

20. Laske seuraavan verkon viivojen lukumäärä:



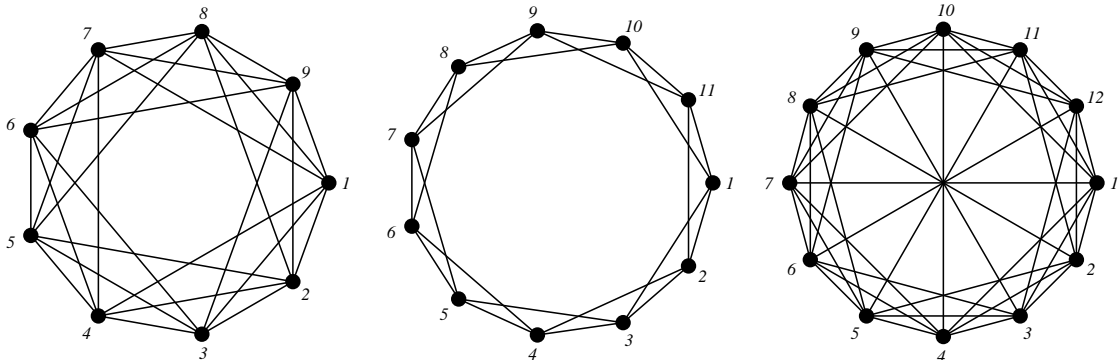


21. *Ikosaedri* on säännöllinen monitahokas, jonka tahkoina on  $t = 20$  tasasivuista kolmiota. Mikä on ikosaedrin särmiä lukumäärä  $s$ ? (Tarkastele verkkoa, jonka pisteinä ovat tahkot ja viivat vastaavat särmiä.)
22. Mikä on ikosaedrin kärkien lukumäärä  $k$ , kun *Eulerin kaavan* (katso Luvun V harjoitustehtävää 17) nojalla on  $k - s + t = 2$ , ja montako särmiä kohtaa toisensa samassa kärjessä?
23. Verkko  $G$  on *säännöllinen*, mikäli kaikilla  $x, y \in P_G$  on voimassa  $d_G(x) = d_G(y)$ . Jos  $G$  on säännöllinen verkko, jonka jokaisen pisteen aste on  $k$ , niin sanotaan, että  $G$  on  $k$ -säännöllinen verkko.
- (a) Osoita, että jos on olemassa epätyhjä  $n$ -pisteinen  $k$ -säännöllinen verkko, niin  $k < n$  ja jompikumpi luvuista  $n$  tai  $k$  on parillinen.
- (b) Osoita, että jos  $G$  on  $n$ -pisteinen  $k$ -säännöllinen verkko, niin  $G$ :n komplementti  $\tilde{G}$  on  $n - k - 1$ -säännöllinen.
- (c) Olkoon  $n$  parillinen. Osoita, että on olemassa  $n$ -pisteinen  $1$ -säännöllinen verkko; näytä lisäksi, että verkko on yhtenäinen vain tapauksessa  $n = 2$ .
- (d) Verkko  $G$  on *rengasverkko*, jos  $G$ :ssä on sellainen yksinkertaisen kierros  $(x_0, \dots, x_n)$ , että  $n > 2$  ja  $V_G = \{\overline{x_i x_{i+1}} : i = 0, \dots, n - 1\}$ . Näytä, että jokainen rengasverkko on  $2$ -säännöllinen.
- (e) Osoita, että kun  $n$  on parillinen, niin liittämällä sopivasti yhteen kaksi rengasverkkoa saadaan yhtenäinen  $n$ -pisteinen  $3$ -säännöllinen verkko.

Seuraavissa tehtävissä osoitetaan, että edellisen tehtävän (a)-kohdan välttämätön ehto " $k < n$  ja luku  $nk$  on parillinen" on myös riittävä ehto sille, että on olemassa  $n$ -pisteinen  $k$ -säännöllinen verkko, missä  $k > 1$  (tapaus  $k = 1$  on käsitelty edellisen tehtävän (c)-kohdassa).

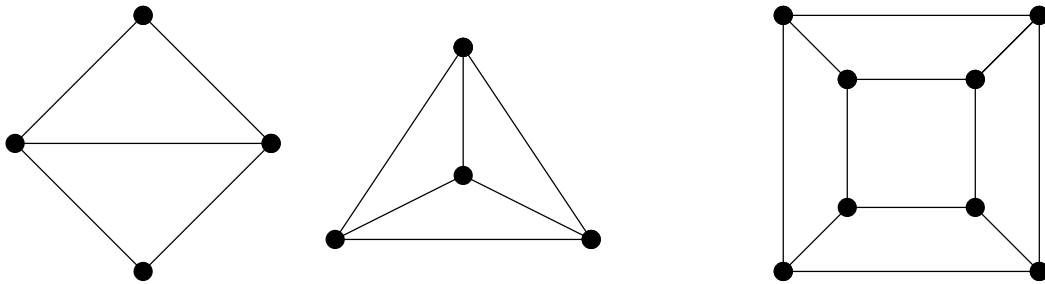
24. Osoita, että  $n$ -pisteinen  $2k$ -säännöllinen verkko  $G_{n,2k}$ , missä  $0 < 2k < n$ , voidaan konstruoida seuraavasti: määrittele joukon  $[n]$  pisteille  $p$  ja  $q$  "etäisyys"  $\rho(p, q)$ :lla ottamalla  $\rho(p, q)$ :ksi pienempi luvuista  $|p - q|$  ja  $n - |p - q|$ ; pane merkille, että jos  $0 < i < \frac{1}{2}n$ , niin jokaisella  $p \in [n]$ , joukossa  $[n]$  on täsmälleen kaksi alkioita, joiden  $\rho$ -etäisyys  $p$ :stä on  $i$ ; valitse verkon  $G_{n,2k}$  pisteiden joukoksi  $P$  ja viivojen joukoksi  $\{\overline{pq} : p, q \in P, p \neq q \text{ ja } \rho(p, q) \leq k\}$ .
25. Pane merkille, että jos luku  $n$  on parillinen, niin edellisessä tehtävässä tarkastellulla joukon  $[n]$  etäisyysfunktioilla  $\rho$  on seuraava ominaisuus: jokaisella  $p \in P$ , joukossa  $[n]$  on täsmälleen yksi alkio, jonka  $\rho$ -etäisyys  $p$ :stä on  $\frac{1}{2}n$ . Olkoon  $n$  parillinen,  $k$  pariton ja  $1 < k < n$ . Osoita, että  $n$ -pisteinen  $k$ -säännöllinen verkko  $G_{n,k}$  voidaan konstruoida lisäämällä edellisessä tehtävässä konstruoituun verkkoon  $G_{n,k-1}$  viivat  $\overline{pq}$ , missä  $p, q \in P$  ja  $\rho(p, q) = \frac{1}{2}n$ .
26. Osoita kahden edellisen tehtävän avulla, että jos luonnollisille luvuille  $n$  ja  $k$  pätee, että  $1 < k < n$  ja luku  $nk$  on parillinen, niin tällöin on olemassa yhtenäinen  $n$ -pisteinen  $k$ -säännöllinen verkko.

Seuraavassa on kuvattu muutamia säännöllisiä verkkoja, jotka on konstruoitu edellisissä tehtävissä kuvatulla menetelmällä:

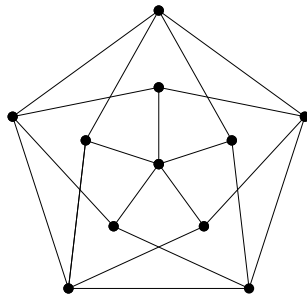


Verkon  $G$  väritysluku eli *kromaattinen luku* on pienin lukumäärä “värejä”, joilla voidaan “värittää”  $G$ :n pisteet siten, että mitkään kaksi samanväristä pistettä ei ole vierekkäin  $G$ :ssä. Tätä lukua merkitään  $\chi(G)$ :llä.

27. Osoita, että verkko on kaksijakoinen (kts tehtävä 8) jos ja vain jos sen väritysluku on korkeintaan kaksi.
28. Määritä seuraavien verkkojen väritysluvut.



29. Osoita, että seuraavassa kuvatun verkon (niin kutsutun *Grötzschin verkon*) väritysluku on 4.



30. Verkon  $G$  pisteiden joukon  $P_G$  osajoukko  $A$  on *riippumaton*, jos mitkään kaksi joukon  $A$  pistettä eivät ole vierekkäin  $G$ :ssä. Verkon  $G$  *riippumattomuusluku*  $\rho(G)$  on  $\max\{|R| : R \subset P_G \text{ on riippumaton}\}$ . Osoita, että  $G$ :n pisteiden lukumäärälle  $n$  on voimassa epäyhtälö

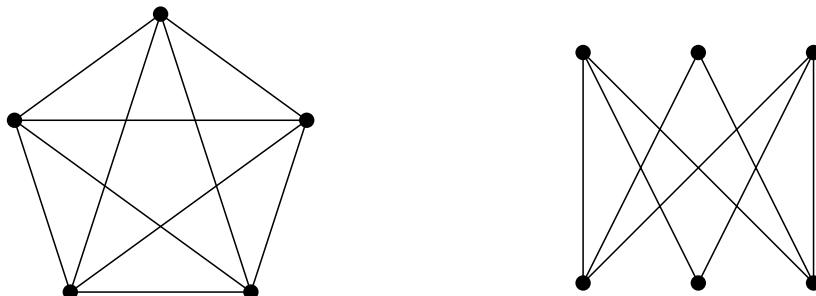
$$n \leq \rho(G) \cdot \chi(G) .$$

31. Määritä tehtävän 12 verkkojen riippumattomuusluvut.
32. Määritellään verkkojen  $G$  ja  $H$  tulo  $G \times H$  asettamalla  $P_{G \times H} = P_G \times P_H$  ja sopimalla, että  $\overline{(v_1, w_1)(v_2, w_2)} \in V_{G \times H}$  jos ja vain jos joko  $w_1 = w_2$  ja  $\overline{v_1 v_2} \in V_G$  tai  $v_1 = v_2$  ja  $\overline{w_1 w_2} \in V_H$ . Osoita, että
- $\chi(G \times H) \leq \chi(G)\chi(H)$ ;
  - $\rho(G)\rho(H) \leq \rho(G \times H)$ .
33. Määritellään "jonoverkko"  $I_n$  asettamalla  $P_{I_n} = [n]$  ja  $V_{I_n} = \{\overline{kk+1} : 1 \leq k < n\}$ . Tällaisten verkkojen  $p$ -kertaistet tulot  $I_n \times I_n \dots \times I_n$  ovat  $p$ -kuutioita  $I_n^p$ . Anna verkon  $I_n^p$  väritysluku  $\chi(I_n^p)$ .
34. Olkoot  $A$  ja  $B$  kaksi verkon  $G$  riippumatonta pistejoukkoa. Osoita, että jos  $|B| = \rho(G)$ , niin on olemassa sellainen injektio  $\varphi : A \rightarrow B$ , että jokaisella  $a \in A$  on voimassa joko  $\varphi(a) = a$  tai  $\overline{a\varphi(a)} \in V_G$ .  
[Ohje: Hallin lause.]
35. Verkon  $G$  pisteiden joukon  $P_G$  osajoukko  $A$  on *hallitseva* eli *dominoiva*, jos jokainen joukon  $P_G \setminus A$  piste on vierekkäin jonkun joukon  $A$  pisteen kanssa. Verkon  $G$  *dominointiluku*  $\delta(G)$  on  $\min\{|D| : D \subset P_G \text{ on dominoiva}\}$ .
- Osoita, että jos  $R \subset P_G$  on maksimaalinen riippumaton joukko (siis  $R$  on riippumaton eikä sisälly mihinkään muuhun riippumattomaan joukkoon), niin  $R$  on dominoiva.
  - Todista (a)-kohdan tuloksen avulla epäyhtälö  $\delta(G) \leq \rho(G)$ .
36. Näytä, että  $n$ -pisteiselle  $k$ -säännölliselle (katso tehtävä 23) verkolle  $G$  pätee epäyhtälö  $n \leq (k+1) \cdot \delta(G)$ .

Verkon  $G$  *esitys tasossa* (*esitys avaruudessa*) on pari  $\mathcal{G} = (\{a_p : p \in P_G\}, \{L_{\overline{pq}} : \overline{pq} \in V_G\})$ , missä  $a_p$  on tason piste (avaruuden piste) jokaisella  $p \in P_G$  ja  $L_{\overline{pq}}$  on pisteiden  $a_p$  ja  $a_q$  yhdysjana. Jos esityksen janat leikkaavat toisiaan ainoastaan päätepisteissään, niin sanotaan, että kyseessä on verkon  $G$  *yksinkertainen esitys tasossa* tai avaruudessa. Jos verkolla  $G$  on yksinkertainen esitys tasossa, niin sanotaan, että  $G$  on *tasoverkko*. Huomautus: Esimerkiksi monet tässä kirjassa olevat verkkojen kuvat antavat verkoille esityksiä tasossa. Kuitenkin monissa kuvissa verkon viivoja esitetään käyrillä eikä janoilla. Voidaan osoittaa, että esimerkiksi yllä annettu tasoverkon määritelmä ei muutu sisällöltään, vaikka sallittaisiin viivojen esittäminen tasokäyrillä. Täten verkko on tasoverkko jos ja vain jos se voidaan piirtää tasoon (siis paperille) siten, että pisteiden yhdysviivat (joiden ei tarvitse olla suorina) leikkaavat toisiaan korkeintaan päätepisteissään.

37. Osoita, että jokaisella verkolla on yksinkertainen esitys avaruudessa (ei tarvitse todistaa tarkasti, pelkkä esityksen kuvailu riittää).  
[Ohje: esitä verkon pisteet avaruuden pallopinnan pisteinä.]
38. Osoita, että verkko on tasoverkko jos ja vain jos sillä on yksinkertainen esitys pallon pinnalla (tässä esityksessä käytetään pisteitä yhdistäviä ympyränkaaria pisteiden yhdysjanojen asemasta).

39. Alla on kuvattu viiden pisteen täydellinen verkko  $K_5$  sekä kuusipisteinen “täydellinen kaksijakoinen verkko”  $K_{3,3}$ .



Osoita, ettei kumpikaan verkko ole tasoverkko.

[Tulkinta verkon  $K_{3,3}$  tapauksessa: seuraavalle “kunnallistekniikkaongelmalle” (“utilities problem”) ei löydy ratkaisua: voidaanko kolmeen taloon vetää putket vesi- kaasujaka- ja kaukolämpölaitoksilta maan pinnalla siten, että putket eivät mene missään ristiin?]

**Huomautus.** K. Kuratowskin v. 1930 ilmestyneen kuuluisan lauseen mukaan verkot  $K_5$  ja  $K_{3,3}$  ovat “tyyppiesimerkkejä” sellaisista verkoista, joilla ei ole yksinkertaista esitystä tasossa: verkko  $G$  on tasoverkko jos ja vain jos  $G$  ei “sisällä” kumpaakaan verkoista  $K_5$  ja  $K_{3,3}$  (“sisältämisen” täsmällinen määritelmä jätetään tässä antamatta).

40. Olkoon  $A$  äärellinen joukko ja olkoon  $G$  ehtojen

$$P_G = \mathcal{P}(A) \quad \text{ja} \quad V_G = \{\overline{BC} : B, C \subset A \text{ ja } |B \setminus C| = |C \setminus B| = 1\}$$

määräämä verkko. Määritä verkon  $G$  yhtenäiset komponentit.

41. Merkitään  $J$ :llä suhteikkoa, jonka pisteinä ovat luvut  $2,3,4,\dots,50$  ja pisteiden  $n$  ja  $k$  välillä on nuoli  $\overrightarrow{nk}$  jos ja vain jos luku  $n$  jakaa luvun  $k$ . Määritä pisteiden  $2,13$  ja  $41$  yhtenäiset ja vahvasti yhtenäiset komponentit suhteikossa  $J$ .
42. (a) Anna esimerkki yhtenäisestä nelipisteisestä verkosta, jolla on yhtenäinen komplementti.  
(b) Näytä, että kohdan (a) verkko on isomorfinen komplementtinsa kanssa.

43. Osoita, että epäyhtenäisen verkon komplementti on yhtenäinen.

44. Osoita, että verkko  $G$  on yhtenäinen, mikäli

$$v_G > \frac{1}{2}(p_G - 1)(p_G - 2).$$

[Ohje: käytä edellisen tehtävän tulosta.]

45. Osoita, että verkko  $G$  ei ole kaksijakoinen, mikäli

$$v_G > \frac{p_G^2}{4}.$$

46. Osoita, että jos  $G$  on verkko, jossa on  $n$  pistettä,  $m$  viivaa ja  $k$  komponenttia, niin

$$m \geq n - k .$$

47. *Kulkuetäisyys*  $\rho_G$  suhteikossa  $G$  määritellään pisteille  $x, y \in P_G$  seuraavasti: jos  $G$ :ssä ei ole kulkua pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ , niin asetetaan  $\rho_G(x, y) = \infty$ ; muussa tapauksessa valitaan  $\rho_G(x, y)$ :ksi pienin niistä luvuista  $n \in \mathbb{N}$ , joilla suhteikossa  $G$  on  $n$ -askeleinen kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ .

(a) Osoita, että vahvasti yhtenäisen suhteikon kulkuetäisyys toteuttaa harjoitustehtävässä I 23 määritellyn metriikan ominaisuuden 1<sup>o</sup> sekä kolmioepäyhtälön.

(b) Osoita, että  $G$ :n kulkuetäisyys on metriikka jos ja vain jos  $G$  on yhtenäinen ja symmetrinen.

(Yhtenäisen ja symmetrisen suhteikon  $G$  tapauksessa puhutaan  $G$ :n *kulkumetriikasta*).

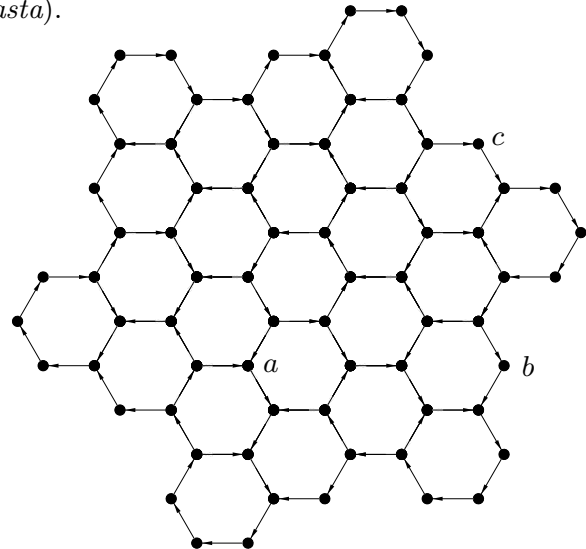
48. Viereinen kuva esittää suhteikkoa  $G$ :

(a) Suhteikko  $G$  on selvästi yhtenäinen.

Onko  $G$  vahvasti yhtenäinen?

(b) Määritä pisteiden  $a$ ,  $b$  ja  $c$

väliset kulkuetäisyydet  $G$ :ssä.



49. Olkoon  $A$  äärellinen joukko. Määrittele sellainen yhtenäinen verkko  $G$ , että  $G$ :n pisteiden joukko on  $\mathcal{P}(A)$  ja kulkumetriikka  $\rho_G$  joukossa  $\mathcal{P}(A)$  on sama kuin harjoitustehtävässä I 23 tarkasteltu joukon  $\mathcal{P}(A)$  metriikka  $d_\Delta$ .

50. Osoita, että edellisessä tehtävässä määritellyssä verkossa  $G$  on Hamiltonin kierros ja näytä Hamiltonin kierroksen olemassaolon avulla, että äärellisellä joukolla  $A$  on sama määrä parillisalkioisia osajoukkoja kuin paritonalkioisia osajoukkoja.

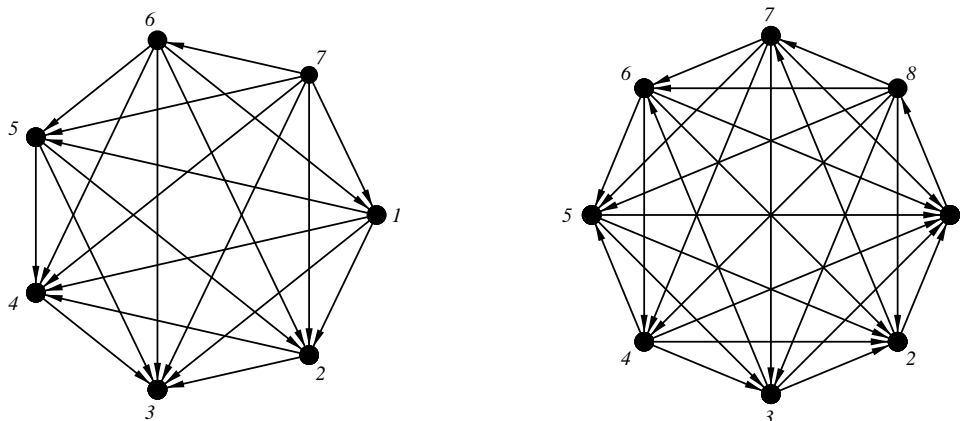
51. Olkoon  $B_n$   $n$ -bittijonojen joukko (eli  $B_n = \{0, 1\}^n$ ). Määritellään verkko  $\mathbb{B}_n$  valitsemalla  $P_{\mathbb{B}_n} = B_n$  ja sopimalla, että kun  $x, y \in B_n$ , niin  $\overline{xy} \in V_{\mathbb{B}_n}$  jos ja vain jos  $x$  ja  $y$  ovat eri jonoja, mutta ne eroavat toisistaan vain yhden bitin kohdalla. Kun  $y \in B_n$ , niin joukko  $\{x \in B_n : \rho_{\mathbb{B}_n}(x, y) \leq k\}$  on verkon  $\mathbb{B}_n$   $k$ -säteinen pallo. Kuinka monta 1-säteistä palloa tarvitaan verkon  $\mathbb{B}_n$  kaikkien pisteiden peittämiseen?

52. *Gray-koodi* on sellainen lukujen  $0, 1, \dots, 2^n - 1$  esitys  $n$ -bittijonoina, jossa kahta peräkkäistä lukua vastaavat jonot eroavat toisistaan vain yhdellä bitillä.

(a) Tulkitse lukujen  $0, 1, \dots, 2^n - 1$  Gray-koodi Hamiltonin kulkuna edellisen tehtävän verkossa  $\mathbb{B}_n$ .

(b) Etsi verkosta  $\mathbb{B}_3$  Hamiltonin kulku ja esitä vastaava Gray-koodi.

53. Etsi Hamiltonin kulut seuraavista täydellisistä suhteikoista. Löytyykö kummastakaan suhteikosta Hamiltonin kierrosta? Jos löytyy, niin etsi sellainen.

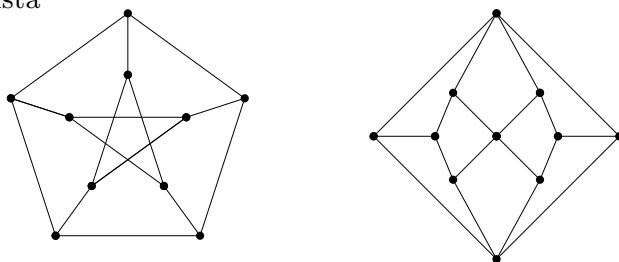


54. Määritellään suhteikko  $S$  asettamalla  $P_S = [10]$  ( $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ) ja  $N_S = \{\overrightarrow{xy} : x, y \in [10], (x - y)(x - y + 1) \geq 20, x \neq 2 \cdot y \text{ ja } y \neq 2 \cdot x\}$ . Näytä, että  
 (a)  $S$  on vahvasti yhtenäinen;  
 (b)  $S$ :ssä ei ole Hamiltonin kierrosta.

55. Edellä on osoitettu, että jokaisella epätyhjällä täydellisellä suhteikolla on juuri. Näytä, että vahvempikin tulos pätee: jokaisessa epätyhjässä täydellisessä suhteikossa  $S$  on sellainen piste, josta on korkeintaan kaksi-asteinen kulku mihin tahansa muuhun suhteikon pisteeseen.

[Ohje: valitse piste, jolla on maksimaalinen lähtöaste.]

56. Etsi verkoista



Hamiltonin kulut, ja näytä, ettei kummastakaan löydy Hamiltonin kierrosta.

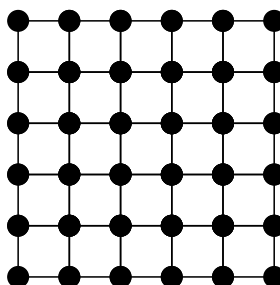
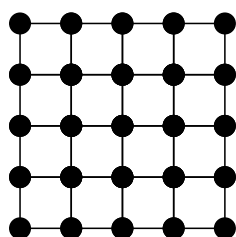
57. Etsi Grötzschin verkosta (kts. tehtävä 30) Hamiltonin kierros.

58. Onko tehtävän 10 verkossa Hamiltonin kulkua tai kierrosta?

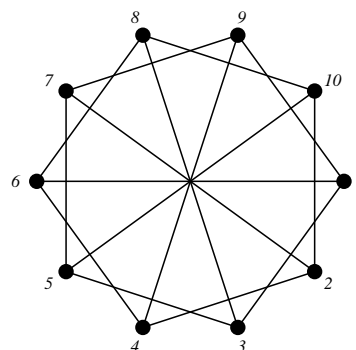
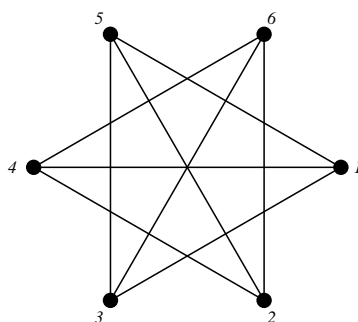
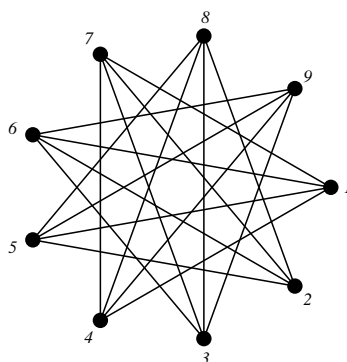
59. Shakkiturnauksen jokainen osanottaja pelaa yhden pelin jokaisen muun osanottajan kanssa. Osoita, että tulosluettelo voidaan järjestää niin, että jokainen on voittanut listassa seuraavan tai pelannut tämän kanssa tasapelin.

60. Olkoon  $G$  täydellinen suhteikko. Osoita, että on olemassa sellainen joukon  $P_G$  ositus  $\{P_1, \dots, P_k\}$ , että
- 1° Joukkojen  $P_i$  virittämät  $G$ :n alisuhteikot ovat vahvasti yhtenäisiä.
  - 2° Jos  $i < j$ , niin  $G$ :ssä ei ole nuolta joukosta  $P_j$  joukkoon  $P_i$ .
- [Ohje. Valitse  $P_i$ :ksi joukon  $P_G \setminus \bigcup_{j < i} P_j$  virittämän  $G$ :n alisuhteikon juurten joukko.]

61. Määritellään jokaisella  $n \in \mathbb{N}$  "ruudukkoverkko"  $R_n$  ottamalla  $R_n$ :n pisteiden joukoksi  $[n] \times [n]$  ja viivojen joukoksi  $\{(i, j)(k, l) : |i - k| + |j - l| = 1\}$ . Seuraavassa kuvassa on esitetty verkot  $R_5$  ja  $R_6$ :



- (a) Pane merkille, että  $R_n = I_n^2$  (kts tehtävä 33).
  - (b) Osoita, että jokaisessa verkossa  $R_n$  on Hamiltonin kulku.
  - (c) Osoita, että jokaisella  $n > 1$ , verkossa  $R_n$  on Hamiltonin kierros jos ja vain jos  $n$  on parillinen.
62. Osoita, että jos kutsuilla jokaisella vieralla on muiden joukossa enemmän tuttuja kuin tuntemattomia, niin vieraat voidaan sijoittaa istumaan pyöreään pöydän ääreen siten, että jokainen tuntee molemmat vierustoverinsa.
63. Onko millään alla kuvatuista verkoista Hamiltonin kierrosta? Entä Hamiltonin kulkua? Etsi kunkin verkon tapauksessa Hamiltonin kierros tai kulku jos sellainen on olemassa.



## Luku II

# Verkon renkaat

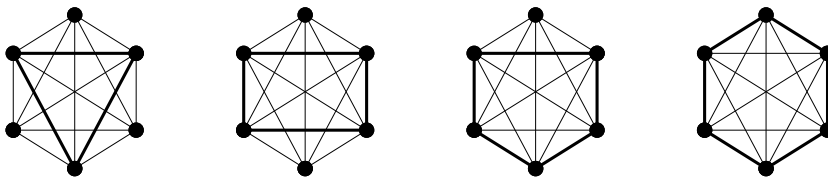
### 1. RENKAIDEN OLEMASSAOLO.

Olemme jo käyttäneet kulkuja ja kierroksia verkkojen yhtenäisyyden ja eräiden muiden ominaisuuksien tutkimisessa. Nyt määrittelemme kierrosten avulla renkaan käsitteen ja tarkastelemme renkaiden olemassaoloa. Tässä jaksossa käsitellään niitä verkkoja, joilla on paljon renkaita ja seuraavassa jaksossa niitä verkkoja, nk. puita, joilla ei ole laisinkaan renkaita.

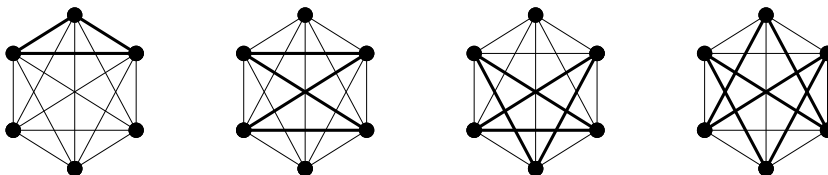
**Määritelmä** Olkoon  $G$  verkko ja olkoon  $W$  joukko  $G$ :n viivoja. Joukko  $W$  on  $G$ :n *renkas*, jos on olemassa sellainen yksinkertainen kierros  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$   $G$ :ssä, että  $n > 2$  ja  $W = V(\bar{x})$ .

Toisinaan kutsumme 3-renkaita *kolmioiksi*, 4-renkaita *neliöiksi* ja  $n$ -renkaita  *$n$ -kulmioiksi*.

**Esimerkkejä (a)** “Renkaan” käsitteessä on pohjalla geometrisluontoisia ideoita: tarkastellaan verkon sisältämiä kolmioita, neliöitä, viisi- ja kuusikulmioita jne. Esimerkiksi verkosta  $K_6$  löytyy seuraavannäköisiä viivajoukkoja:

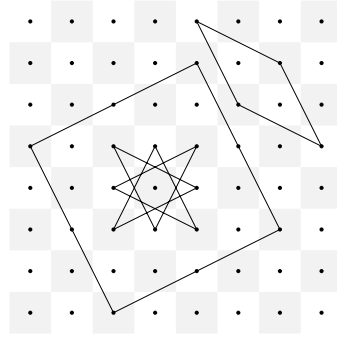


(b) “Neliöt”, “viisikulmiot” jne. eivät kuitenkaan aina muistuta geometrisiä vakio-mallejansa ja toisinaan niiden tunnistaminen verkosta voi olla vaikeaa:





(c) Jos  $p_G > 2$  ja jos  $\bar{x}$  on Hamiltonin kierros verkossa  $G$ , niin joukko  $V(\bar{x})$  on  $G$ :n rengas. Täten esimerkiksi edellisessä luvussa kuvattu “ratsun puolimaaginen marssi” määrittää erään renkaan shakkipelin hevosen liikkeiden määräämässä verkossa  $H$ . Seuraavassa on kuvattu kolme yksinkertaisempaa rengasta verkossa  $H$ .



Yksinkertainen kierros  $(x_0, \dots, x_n)$ , missä  $n \leq 2$ , on joko muotoa  $(x)$  (tapaus  $n = 0$ ) tai muotoa  $(x, y, x)$  (tapaus  $n = 2$ ); täten edellisessä määritelmässä asetettu ehto “ $n > 2$ ” sulkee pois tyhjän viivajoukon sekä muotoa  $\{v\}$ , missä  $v \in V_G$ , olevat joukot verkon  $G$  renkaiden joukosta.

Myöhemmin tarvitsemme seuraavaa yksinkertaista huomiota: jos joukko  $W$  on verkon  $G$  aliverkon  $H$  rengas, niin tällöin  $W$  on myös  $G$ :n rengas.

Yhtenäisen verkon tapauksessa voimme antaa yksinkertainen luonnehdinnan niille verkon viivoille, jotka kuuluvat johonkin verkon renkaaseen.

Otamme käyttöön seuraavan merkinnän: kun  $G$  on verkko ja  $v \in V_G$ , niin merkitsemme  $G - v$ :llä sitä  $G$ :n aliverkkoa, joka määräytyy ehdoista  $P_{G-v} = P_G$  ja  $V_{G-v} = V_G \setminus \{v\}$  eli sitä verkkoa, jonka saamme *poistamalla*  $G$ :stä viivan  $v$ .

**II 1.1 Lause** *Yhtenäisen verkon  $G$  viiva  $v$  kuuluu johonkin  $G$ :n renkaaseen jos ja vain jos verkko  $G - v$  on yhtenäinen.*

**Todistus.** Olkoot  $a$  ja  $b$  viivan  $v$  päätepisteet.

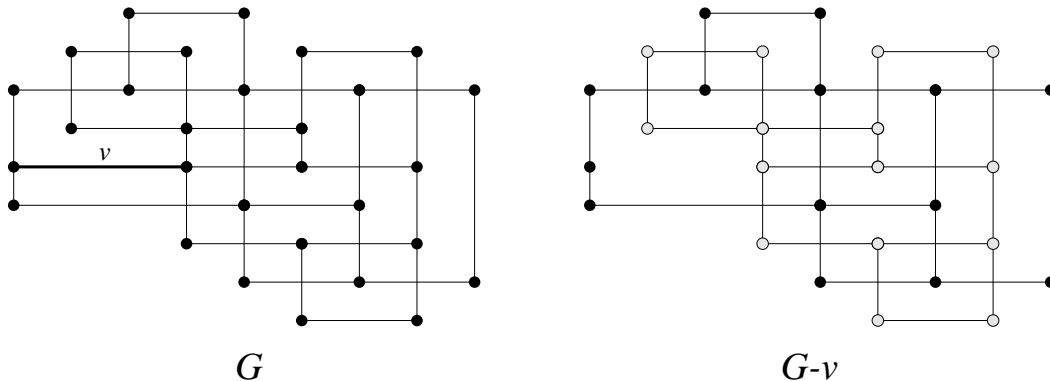
*Välttämättömyys.* Oletamme, että  $v$  kuuluu johonkin  $G$ :n renkaaseen. Tällöin on olemassa sellainen yksinkertainen kierros  $(x_0, \dots, x_n)$   $G$ :ssä, että  $n > 2$ ,  $x_0 = a$  ja  $x_1 = b$ . Merkitsemme  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ja  $\bar{z} = (x_n, \dots, x_1)$  ja panemme merkille, että  $\bar{x}$  on kulku verkossa  $G - v$   $b$ :stä  $a$ :han ja  $\bar{z}$  on kulku  $G - v$ :ssä  $a$ :sta  $b$ :hen. Osoitamme nyt verkon  $G - v$  yhtenäisyyden Lauseen I 4.8 avulla näyttämällä, että kaikilla verkon  $G - v$  pisteillä  $p$  ja  $q$ , verkossa  $G - v$  on kulku  $p$ :stä  $q$ :hun. Olkoot siis  $p$  ja  $q$  verkon  $G - v$

pisteitä. Tällöin  $p$  ja  $q$  ovat verkon  $G$  pisteitä ja  $G$ :n yhtenäisyydestä seuraa Lauseen I 4.8 ja Lemman I 4.3 nojalla, että  $G$ :ssä on yksinkertainen kulku  $\bar{y} = (y_0, \dots, y_k)$   $p$ :stä  $q$ :hun. Jos kulku  $\bar{y}$  ei kulje pitkin viivaa  $v$ , niin  $\bar{y}$  on kulku verkossa  $G - v$   $p$ :stä  $q$ :hun. Oletetaan, että on olemassa sellainen luku  $i \in [k]$ , että  $\overline{y_{i-1}y_i} = v$ . Pannaan merkille, että kulun  $\bar{y}$  yksinkertaisuudesta seuraa, että jokaiselle  $j \in [k]$  pätee, että jos  $j \neq i$ , niin  $\overline{y_{j-1}y_j} \neq v$ . Nyt nähdään, että jos  $y_{i-1} = a$  ja  $y_i = b$ , niin jono  $(y_0, \dots, y_{i-1}) \star \bar{z} \star (y_i, \dots, y_k)$  on kulku  $G - v$ :ssä  $p$ :stä  $q$ :hun ja jos  $y_{i-1} = b$  ja  $y_i = a$ , niin jono  $(y_0, \dots, y_{i-1}) \star \bar{x} \star (y_i, \dots, y_k)$  on kulku  $G - v$ :ssä  $p$ :stä  $q$ :hun. Olemme osoittaneet, että verkko  $G - v$  on yhtenäinen.

*Riittävyys.* Oletamme, että verkko  $G - v$  on yhtenäinen. Koska on voimassa  $a, b \in P_G = P_{G-v}$ , niin verkossa  $G - v$  on Lauseen I 4.8 ja Lemman I 4.3 nojalla yksinkertainen kulku  $(z_0, \dots, z_k)$  pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$ . Koska verkossa  $G - v$  ei ole viivaa  $\overline{ab}$ , niin on voimassa  $k > 1$ . Merkitsemme  $n = k + 1$  ja määrittelemme jonon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  asettamalla  $x_n = a$  ja  $x_j = z_j$  jokaisella  $j < n$ ; tällöin  $\bar{x}$  on yksinkertainen kierros verkossa  $G$ . Lisäksi  $v$  kuuluu joukkoon  $V(\bar{x})$  ja tämä joukko on rengas, koska  $n > 2$ .  $\square$

Huomaamme, että jos  $v = \overline{ab}$  on yhtenäisen verkon  $G$  viiva, niin verkossa  $G - v$  on korkeintaan kaksi komponenttia, nimittäin pisteiden  $a$  ja  $b$  komponentit: jos  $H$  olisi kolmas komponentti, niin yhtenäisestä verkosta  $G$  löytyisi viiva  $w$  joukkojen  $P_H$  ja  $P_G \setminus P_H$  välille; koska  $a \notin P_H$  ja  $b \notin P_H$ , niin olisi voimassa  $w \neq v$  ja  $w$  olisi verkon  $G - v$  viiva; tämä on mahdotonta, koska  $H$ :n piti olla  $G - v$ :n komponentti.

**Esimerkki** Seuraavassa vasemmalla kuvatussa verkossa  $G$  kaikki muut  $G$ :n viivat kuuluvat johonkin  $G$ :n renkaaseen paitsi paksulla piirretty viiva  $v$ ; oikeanpuolisessa kuvassa näkyvät verkon  $G - v$  yhtenäiset komponentit.



Jos  $v$  on epäyhtenäisen verkon  $G$  viiva, niin voimme soveltaa edellisen lauseen tulosta siihen  $G$ :n yhtenäiseen komponenttiin, jonka viiva  $v$  on; täten saamme lauseelle seuraavan yleistyksen.

**II 1.2 Korollaari** *Verkon  $G$  viiva  $v$  kuuluu johonkin  $G$ :n renkaaseen jos ja vain jos verkoilla  $G$  ja  $G - v$  on sama määrä yhtenäisiä komponentteja.*

Näemme helposti, että verkossa  $G - v$  on korkeintaan yksi komponentti enemmän kuin verkossa  $G$ . Jos nimittäin  $\mathcal{K}$  on  $G$ :n kaikkien komponenttien kokoelma ja  $H \in \mathcal{K}$  on se komponentti, jolla  $v \in V_H$ , niin  $G - v$ :n yhtenäiset komponentit ovat verkot  $J \in \mathcal{K} \setminus \{H\}$  sekä verkon  $H - v$  komponentit; edellä totesimme, että verkolla  $H - v$  on korkeintaan kaksi komponenttia.

Edellisen tuloksen nojalla verkolla on rengas jos ja vain jos sillä on viiva, jonka poistaminen ei lisää yhtenäisten komponenttien lukumäärää. Lauseessa II 2.7 annamme toisen luonnehdinnan renkaan olemassaololle. Seuraavassa lauseessa annamme erään käyttökelpoisen riittävän, muttei välttämättömän ehdon sille, että verkossa on rengas.

**II 1.3 Lause** *Olkoon  $G$  epätyhjä verkko, jolle pätee epäyhtälö  $v_G \geq p_G$ . Tällöin  $G$ :llä on rengas.*

**Todistus.** Todistamme lauseen väitteen induktiolla luvun  $p_G$  suhteen. Tapauksessa  $p_G = 1$  väite pätee sisällöttömänä, koska tässä tapauksessa on voimassa  $v_G = 0 < p_G$ . Oletamme, että on voimassa  $p_G > 1$  ja että olemme jo todistaneet väitteen sellaisille verkoille  $H$ , joilla  $p_H < p_G$ . On voimassa  $v_G \geq p_G > 1$ , joten  $V_G \neq \emptyset$ . Olkoon  $v$   $G$ :n viiva. Jos  $v$  kuuluu johonkin  $G$ :n renkaaseen, niin  $G$ :llä on rengas. Oletamme, ettei  $v$  kuulu mihinkään  $G$ :n renkaaseen. Olkoot  $H_1, \dots, H_n$  verkon  $G - v$  yhtenäiset komponentit, missä  $H_i \neq H_j$  kun  $i \neq j$ . Korollaarin II 1.2 nojalla on voimassa  $n > 1$ . Lauseiden I 3.10 ja I 3.8 nojalla on voimassa

$$v_{G-v} = \sum_{i=1}^n v_{H_i} \quad \text{ja} \quad p_{G-v} = \sum_{i=1}^n p_{H_i}.$$

Tästä seuraa, että jollain  $i \in [n]$  on voimassa  $v_{H_i} \geq p_{H_i}$ : muussa tapauksessa olisi voimassa

$$v_G - 1 = v_{G-v} = \sum_{i=1}^n v_{H_i} \leq \sum_{i=1}^n (p_{H_i} - 1) = p_{G-v} - n = p_G - n$$

ja tästä seuraisi ristiriita oletuksen  $v_G \geq p_G$  kanssa. Olkoon  $i \in [n]$  sellainen, että  $v_{H_i} \geq p_{H_i}$ . Tällöin on voimassa  $v_{H_i} \geq p_{H_i}$  ja  $p_{H_i} < p_{G-v} = p_G$ , joten induktiooletuksen nojalla verkolla  $H_i$  on rengas  $R$ . Selvästikin  $R$  on myös verkon  $G$  rengas.  $\square$

**II 1.4 Korollaari** *Olkoon  $G$  epätyhjä verkko, jonka jokaisen pisteen aste on suurempi kuin yksi. Tällöin  $G$ :llä on rengas.*

**Todistus.** Koska jokaiselle  $x \in P_G$  pätee, että  $d_G(x) \geq 2$ , niin Lauseen 2.2.3 nojalla on voimassa

$$2 \cdot v_G = \sum_{x \in P_G} d_G(x) \geq \sum_{x \in P_G} 2 = 2 \cdot |P_G| = 2 \cdot p_G.$$

Näin ollen on voimassa  $v_G \geq p_G$  ja Lauseen II 1.9 nojalla  $G$ :llä on rengas.  $\square$

Näytämme vielä, että edellistä tulosta on mahdollista hieman vahvistaa.

**II 1.5 Korollaari** *Olkoon  $G$  verkko, jossa on ainakin kaksi pistettä. Oletetaan, että on olemassa sellainen  $a \in P_G$ , että jokaisen muun  $G$ :n pisteen aste on suurempi kuin yksi. Tällöin  $G$ :llä on rengas.*

**Todistus.** Tarkastelemme kahta eri tapausta.

Oletamme aluksi, että  $a$  on  $G$ :n eristetty piste. Merkitsemme  $G'$ :lla joukon  $P_G \setminus \{a\}$  virittämää  $G$ :n aliverkkoa. Koska  $a$  on  $G$ :n eristetty piste, niin jokaisella  $b \in P_G \setminus \{a\}$  on voimassa  $d_{G'}(b) = d_G(b)$ . Näin ollen epätyhjän verkon  $G'$  jokaisen pisteen aste on suurempi kuin yksi. Korollaarin II 1.4 nojalla verkossa  $G'$  on rengas  $W$ . Joukko  $W$  on myös verkon  $G$  rengas.

Oletamme seuraavaksi, että  $a$  ei ole  $G$ :n eristetty piste. Tällöin on voimassa  $d_G(a) \geq 1$ . Koska jokaiselle  $x \in P_G \setminus \{a\}$  pätee, että  $d_G(x) \geq 2$ , niin Lauseen I 2.3 nojalla on voimassa

$$2 \cdot v_G = \sum_{x \in P_G} d_G(x) \geq 1 + \sum_{x \in P_G \setminus \{a\}} 2 = 1 + 2 \cdot |P_G \setminus \{a\}| = 2 \cdot p_G - 1.$$

Näin ollen on voimassa  $v_G \geq p_G - \frac{1}{2}$ ; tästä seuraa, koska  $v_G$  on kokonaisluku, että on voimassa  $v_G \geq p_G$ . Lauseen II 1.3 nojalla  $G$ :llä on rengas.  $\square$

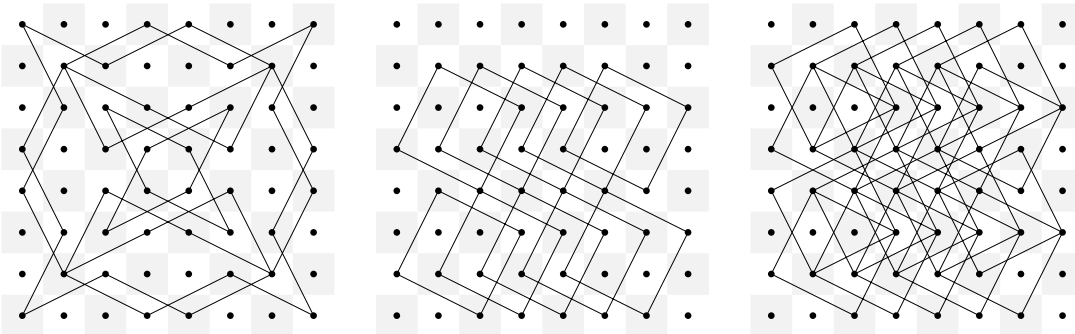
## 2. RENKAISTOT.

**II 2.1 Määritelmä** Olkoon  $G$  verkko. Joukon  $V_G$  osajoukko  $W$  on  $G$ :n *renkaisto*, jos on olemassa sellainen erillinen perhe  $\mathcal{R}$   $G$ :n renkaita, että  $W = \bigcup \mathcal{R}$ .

Merkitsemme verkon  $G$  kaikkien renkaistojen muodostamaa perhettä symbolilla  $\mathcal{R}(G)$ .

Huomaamme, että annetun määritelmän nojalla sekä tyhjä viivajoukko että jokainen  $G$ :n rengas on  $G$ :n renkaisto.

Seuraavat kuvat esittävät eräitä renkaistoja shakkipelin hevosen liikkeisiin liittyvässä verkossa  $H$ :



Olkoon  $G$  verkko ja olkoon  $W$  joukon  $V_G$  osajoukko. Merkitsemme  $P_W$ :lla joukkoa  $\{x \in P_G : \overline{xy} \in W \text{ jollain } y \in P_G\}$ . Tällöin on olemassa verkon  $G$  aliverkko  $H$ , joka määräytyy ehdoista  $P_H = P_W$  ja  $V_H = W$ ; kutsumme verkkoa  $H$  *joukon  $W$  virittämäksi  $G$ :n aliverkoksi*.

Voimme panna merkille, että viivajoukon virittämässä verkossa ei koskaan ole eristettyjä pisteitä.

Seuraavassa luonnehdimme renkaistoja pisteiden asteiden avulla. Todistamme ensin erään aputuloksen.

**II 2.2 Lemma** *Olkoon  $H$  verkon renkaan virittämä aliverkko. Tällöin jokaisella  $x \in P_H$  on voimassa  $d_H(x) = 2$ .*

**Todistus.** Olkoon  $H$  verkon  $G$  renkaan  $R$  virittämä  $G$ :n aliverkko. Verkossa  $G$  on olemassa sellainen yksinkertainen kierros  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$ , että  $n > 2$  ja  $R = V(\bar{x})$ . Verkko  $H$  määräytyy ehdoista  $P_H = \{x_1, \dots, x_n\}$  ja  $V_H = \{\overline{x_0x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}x_n}\}$ . Olkoon nyt  $x$  verkon  $H$  piste. Merkitään  $I = \{i \in \{0, \dots, n\} : x_i = x\}$ . Olkoon  $i$  joukon  $I$  alkio. Jos  $i \notin \{0, n\}$ , niin kierroksen  $\bar{x}$  yksinkertaisuudesta seuraa, että  $I = \{i\}$ . Tässä tapauksessa on voimassa  $\{y \in P_H : \overline{xy} \in V_H\} = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ ; lisäksi kulun  $\bar{x}$  yksinkertaisuudesta seuraa yhdessä epäyhtälön  $n > 2$  kanssa, että on voimassa  $x_{i-1} \neq x_{i+1}$ ; näin ollen on voimassa  $d_H(x) = |\{x_{i-1}, x_{i+1}\}| = 2$ . Jos taas  $i \in \{0, n\}$ , niin  $I = \{0, n\}$  ja  $\{y \in P_H : \overline{xy} \in V_H\} = \{x_1, x_{n-1}\}$ ; kulun  $\bar{x}$  yksinkertaisuudesta yhdessä epäyhtälön  $n > 2$  kanssa seuraa, että  $x_1 \neq x_{n-1}$ , joten  $d_H(x) = |\{x_1, x_{n-1}\}| = 2$ .  $\square$

**II 2.3 Lause** *Olkoon  $G$  verkko. Joukon  $V_G$  osajoukko  $W$  on  $G$ :n renkaisto jos ja vain jos joukon  $W$  virittämä  $G$ :n aliverkko on parillisasteinen.*

**Todistus.** *Välttämättömyys.* Oletamme, että  $W$  on renkaisto. Tällöin on olemassa sellaiset  $G$ :n erilliset renkaat  $R_1, \dots, R_n$ , että  $W = \bigcup_{i=1}^n R_i$ . Merkitsemme  $H$ :lla joukon  $W$  virittämää  $G$ :n aliverkkoa ja merkitsemme jokaisella  $i \in [n]$ ,  $H_i$ :llä joukon  $R_i$  virittämää  $G$ :n aliverkkoa. Lemman II 2.2 tuloksen nojalla kaikilla  $x \in P_H$  ja  $i \in [n]$  on voimassa joko  $d_{H_i}(x) = 2$  tai  $d_{H_i}(x) = 0$ . Koska joukot  $R_1, \dots, R_n$  ovat erillisiä ja koska pätee, että  $W = \bigcup_{i=1}^n R_i$ , jokaisella  $x \in P_H$  on voimassa  $d_H(x) = \sum_{i=1}^n d_{H_i}(x)$ ; tästä seuraa, että luku  $d_H(x)$  on parillinen.

*Riittävyys.* Todistamme induktiolla joukon  $V_G$  osajoukon alkioden lukumäärän suhteen, että jos osajoukon virittämä  $G$ :n aliverkko on parillisasteinen, niin osajoukko on renkaisto. Jos alkioden lukumäärä on nolla, niin osajoukko on tyhjä ja täten renkaisto. Olkoon nyt  $n > 0$  sellainen luku, että olemme jo todistaneet väitteen niille joukoille  $V \subset V_G$ , joilla  $|V| < n$ . Olkoon  $W \subset V_G$  sellainen joukko, että  $|W| = n$  ja  $W$ :n virittämä  $G$ :n aliverkko  $H$  on parillisasteinen. Jokaisella  $x \in P_H$  on voimassa  $d_H(x) \geq 2$ , joten Korollarin II 1.4 nojalla  $H$ :ssa on rengas  $T$ . Merkitään  $J$ :llä viivajoukon  $T$  virittämää  $G$ :n aliverkkoa. Lemman II 2.2 nojalla verkko  $J$  on parillisasteinen. Merkitään  $K$ :lla viivajoukon  $W \setminus T$  virittämää  $G$ :n aliverkkoa. Jokaisella  $x \in P_K$  on voimassa  $d_K(x) = d_H(x) - d_J(x)$ ; tästä seuraa, että verkko  $K$  on parillisasteinen. Koska on voimassa  $|W \setminus T| < |W| = n$ , niin induktio-oletuksesta seuraa, että joukko  $W \setminus T$  on  $G$ :n renkaisto. Täten on olemassa sellainen erillinen perhe  $\mathcal{R}$   $G$ :n renkaita, että  $\bigcup \mathcal{R} = W \setminus T$ . Koska  $\bigcup W \cap T = \emptyset$ , niin perhe  $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{T\}$  on erillinen. Lisäksi on voimassa  $\bigcup \mathcal{R}' = (\bigcup \mathcal{R}) \cup T = (W \setminus T) \cup T = W$ . Olemme osoittaneet, että joukko  $W$  on renkaisto.  $\square$

**II 2.4 Korollaari** Verkko  $G$  on parillisasteinen jos ja vain jos joukko  $V_G$  on renkaisto.

Edellisen lauseen tulos on erittäin käyttökelpoinen kun yritämme päätellä, onko annettu viivajoukko renkaisto vai ei. Esimerkiksi edellisellä sivulla kuvattujen viivajoukkojen tapauksissa on helpompaa tarkistaa niiden virittämien verkkojen parillisasteisuus kuin esittää joukot erillisten renkaiden yhdisteinä.

Olkoon  $G$  verkko. Korollaarin A 1.13 nojalla pari  $(\mathcal{P}(V_G), \Delta)$  on ryhmä. Osoitamme nyt Lauseen II 2.3 avulla, että joukon  $\mathcal{P}(V_G)$  osajoukko  $\mathcal{R}_G$  on ryhmän  $(\mathcal{P}(V_G), \Delta)$  aliryhmä.

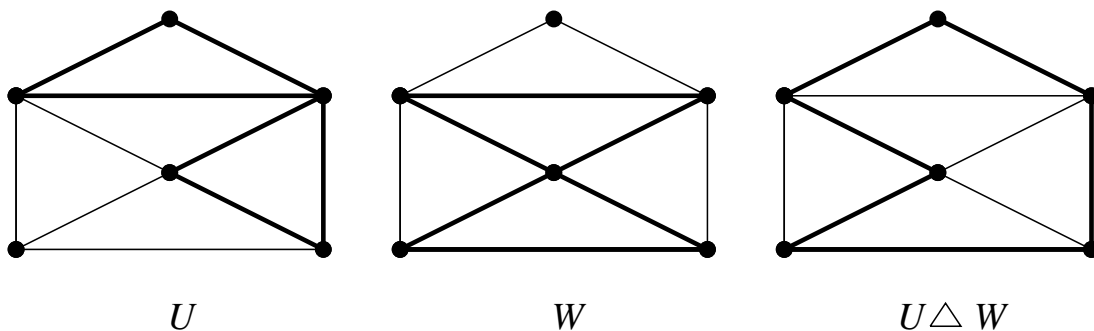
**II 2.5 Lause** Olkoot  $W_1$  ja  $W_2$  verkon  $G$  renkaistoja. Tällöin joukko  $W_1 \Delta W_2$  on  $G$ :n renkaisto.

**Todistus.** Merkitään  $W_0 = W_1 \Delta W_2$ . Jokaisella  $i \in \{0, 1, 2\}$  merkitään  $H_i$ :llä joukon  $W_i$  virittämää  $G$ :n aliverkkoa. Lauseen II 2.3 nojalla pätee, että verkot  $H_1$  ja  $H_2$  ovat parillisasteisia sekä että joukko  $W_0$  on  $G$ :n renkaisto, mikäli verkko  $H_0$  on parillisasteinen. Olkoon  $x$  verkon  $H_0$  piste. Merkitään  $V$ :llä niiden  $G$ :n viivojen muodostamaa joukkoa, joilla on  $x$  yhtenä päätepisteenä ja pannaan merkille, että  $d_{H_i}(x) = |W_i \cap V|$ ; täten joukoissa  $W_1 \cap V$  ja  $W_2 \cap V$  on verkkojen  $H_1$  ja  $H_2$  parillisasteisuuden nojalla parilliset määrät alkioita. Koska  $W_0 = W_1 \Delta W_2$ , niin Lemman A 1.9 nojalla on voimassa

$$W_0 \cap V = (W_1 \cap V) \Delta (W_2 \cap V).$$

Edellisestä seuraa Korollaarin A 1.16 nojalla, että joukossa  $W_0 \cap V$  on parillinen määrä alkioita; täten luku  $d_{H_0}(x) = |W_0 \cap V|$  on parillinen. On näytetty, että verkko  $H_0$  on parillisasteinen.  $\square$

**Esimerkki** Seuraava kuva esittää “kirjekuoriverkon” kahta renkaistoa  $U$  ja  $W$  sekä niiden symmetristä erotusta  $U \Delta W$ .



Koska ryhmän  $(\mathcal{P}(V_G), \Delta)$  neutraalialkio  $\emptyset$  on  $G$ :n renkaisto ja koska jokainen ryhmän alkio on itsensä käänteisalkio, niin Lauseen II 2.5 tuloksesta seuraa, että pari  $(\mathcal{R}(G), \Delta)$  on ryhmä (ryhmän  $(\mathcal{P}(V_G), \Delta)$  “aliryhmä”). Ryhmää  $(\mathcal{R}(G), \Delta)$  kutsutaan verkon  $G$  *renkaistoryhmäksi*.

Lauseen II 2.5 avulla voimme todistaa vielä erään luonnehdinnan renkaan olemassaololle verkossa. Todistamme ensin seuraavan apulauseen.

**II 2.6 Lemma** *Olkoot  $a$  ja  $b$  verkon  $G$  pisteitä,  $a \neq b$  ja olkoot  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  yksinkertaisia kulkuja  $G$ :ssä pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$ . Tällöin joukko  $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$  on  $G$ :n renkaisto.*

**Todistus.** Olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  ja  $\bar{y} = (y_0, \dots, y_k)$ . Tarkastellaan neljää eri tapusta.

*Tapaus 1* On voimassa  $\overline{ab} \in V(\bar{x})$  ja  $\overline{ab} \in V(\bar{y})$ . Tällöin kulkujen  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  yksinkertaisuudesta seuraa, että on voimassa  $\bar{x} = (a, b) = \bar{y}$  ja täten  $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y}) = \emptyset$ .

*Tapaus 2:* On voimassa  $\overline{ab} \in V(\bar{x})$  ja  $\overline{ab} \notin V(\bar{y})$ . Tällöin  $\bar{x} = (a, b)$  ja kulku  $\bar{z} = (y_0, \dots, y_k, y_0)$  on yksinkertainen kierros  $G$ :ssä. Koska  $\overline{ab} \notin V(\bar{y})$ , on voimassa  $k > 1$  ja tästä seuraa, että kulun  $\bar{z}$  askelten lukumäärä on suurempi kuin kaksi. Näin ollen  $V(\bar{z})$  on  $G$ :n rengas. Lisäksi on voimassa  $V(\bar{z}) = V(\bar{x}) \cup V(\bar{y}) = V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$ .

*Tapaus 3:* On voimassa  $\overline{ab} \in V(\bar{y})$  ja  $\overline{ab} \notin V(\bar{x})$ . Tämä tapaus käsitellään aivan samoin kuin Tapaus 2.

*Tapaus 4:* On voimassa  $\overline{ab} \notin V(\bar{x})$  ja  $\overline{ab} \notin V(\bar{y})$ . Tällöin  $n > 1$  ja  $k > 1$ . Merkitään  $G'$ :lla ehtojen  $P_{G'} = P_G$  ja  $V_{G'} = V_G \cup \{\overline{ab}\}$  määräämää verkkoa. Kulut  $\bar{x}' = (x_0, \dots, x_n, x_0)$  ja  $\bar{y}' = (y_0, \dots, y_k, y_0)$  ovat yksinkertaisia kierroksia verkossa  $G'$  ja kummankin askelten lukumäärä on suurempi kuin kaksi; täten  $U = V(\bar{x}')$  ja  $W = V(\bar{y}')$  ovat  $G'$ :n renkaita. Lauseen II 2.5 nojalla joukko  $U\Delta W$  on  $G'$ :n renkaisto. Koska  $U = V(\bar{x}) \cup \{\overline{ab}\}$  ja  $W = V(\bar{y}) \cup \{\overline{ab}\}$ , on voimassa  $U\Delta W = V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$ ; näin ollen joukko  $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$  on renkaisto.  $\square$

Luonnehdimme nyt renkaan olemassaoloa kulkujen avulla.

**II 2.7 Lause** *Verkossa  $G$  on rengas jos ja vain jos on olemassa sellaiset  $G$ :n pisteet  $a$  ja  $b$ , että  $a \neq b$  ja  $G$ :ssä on ainakin kaksi eri yksinkertaista kulkua pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$ .*



**Todistus.** *Välttämättömyys.* Renkaan olemassaolosta seuraa lauseessa mainitun ehdon voimassaolo: jos nimittäin  $G$ :ssä on rengas, niin tällöin  $G$ :ssä on yksinkertainen kierros  $(x_0, \dots, x_n)$ , missä  $n > 2$ ; tässä tapauksessa voidaan valita  $a = x_1$  ja  $b = x_0$ , jolloin  $(x_1, \dots, x_n)$  ja  $(x_1, x_0)$  ovat kaksi eri yksinkertaista kulkua pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$ .

*Riittävyys.* Oletetaan, että on olemassa sellaiset  $G$ :n pisteet  $a$  ja  $b$  ja sellaiset  $G$ :n yksinkertaiset kulut  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$ , että  $a \neq b$  ja  $\bar{x} \neq \bar{y}$ . Lemman II 2.6 nojalla joukko  $V(\bar{x}) \Delta V(\bar{y})$  on  $G$ :n renkaisto. Lisäksi nähdään, koska  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  ovat yksinkertaisia kulkuja  $a$ :sta  $b$ :hen ja  $\bar{x} \neq \bar{y}$ , että  $V(\bar{x}) \neq V(\bar{y})$ : jos vaikkapa  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  ja  $\bar{y} = (y_0, \dots, y_k)$  ja jos merkitään  $j = \max\{i : (x_0, \dots, x_i) = (y_0, \dots, y_i)\}$ , niin tällöin on voimassa  $j < n$  ja  $\overline{x_j, x_{j+1}} \in V(\bar{x}) \setminus V(\bar{y})$ . Edellisestä seuraa, että  $G$ :n renkaisto  $V(\bar{x}) \Delta V(\bar{y})$  on epätyhjä; täten verkossa  $G$  on rengas.  $\square$

### 3. EULERIN KULUT.

Kuten edellä mainitsimme, ainakaan toistaiseksi ei ole löytynyt mitään välttämättömiä ja riittäviä ehtoja, joiden avulla voisi helposti päätellä onko annetussa verkossa Hamiltonin kulkua vai ei. Tarkastelemme nyt kulkuja, jotka verkon pisteiden asemesta luettelevat yksinkertaisesti verkon viivat; tällaisia kulkuja kutsutaan Eulerin kuluksi. Osoitamme seuraavassa, että Eulerin kulkujen olemassaololle löytyy luonnehdinta yksinkertaisella ehdolla, jonka voimassaolo on usein helposti tarkastettavissa annetun verkon tapauksessa.

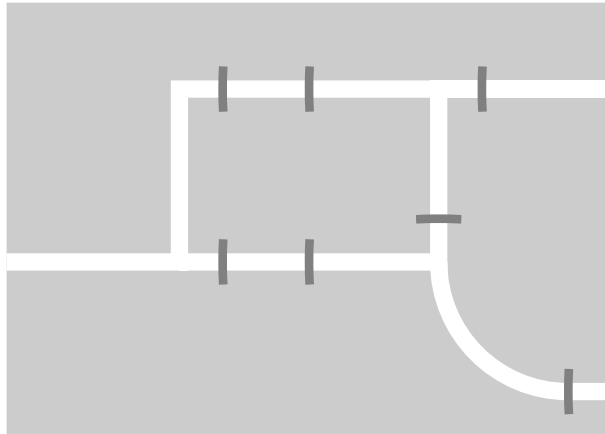
**II 3.1 Määritelmä** Olkoon  $G$  verkko. *Eulerin kulku* verkossa  $G$  on sellainen kulku  $(x_0, \dots, x_n)$   $G$ :ssä, että jokainen  $G$ :n viiva esiintyy täsmälleen yhden kerran jonossa  $(\overline{x_0x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}x_n})$ .

Jos Eulerin kulku  $(x_0, \dots, x_n)$  on kierros, niin sanomme sen olevan *Eulerin kierros*.

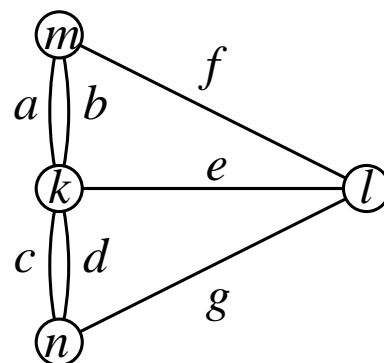
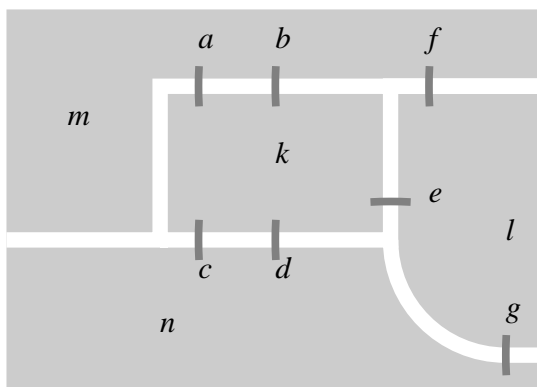
Kulku  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  verkossa  $G$  on täten Eulerin kulku  $G$ :ssä jos ja vain jos seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat: (1) kaikilla  $0 < i < j \leq n$  on voimassa  $\overline{x_{i-1}x_i} \neq \overline{x_{j-1}x_j}$ ; (2)  $V(\bar{x}) = V_G$ .

Koko verkkoteorian voi katsoa alkaneen v. 1736 ilmestyneestä artikkelista, jossa L. Euler ratkaisi seuraavan nk. Königsbergin siltojen ongelman.

**II 3.2 Esimerkki** Königsbergin kaupungin (nyk. Kaliningrad) läpi virtaavan Pregeljoen ja sen sivuhaaran rantoja sekä Kneiphofin saarta yhdistämään oli rakennettu alla olevan kaavakuvan mukaiset seitsemän siltaa:

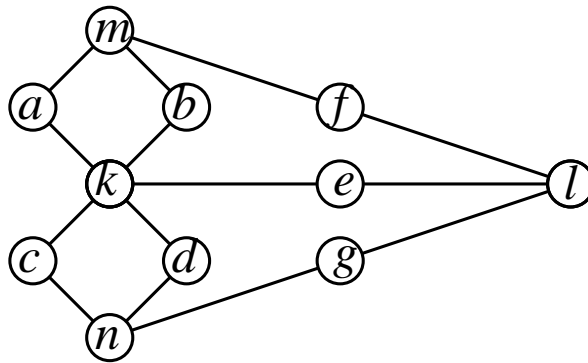


Kaupunkilaiset olivat pohtineet seuraavaa ongelmaa: Olisiko mahdollista kulkea jotakin reittiä pitkin kaikkien seitsemän sillan yli kulkematta minkään sillan yli kahteen kertaan? Ongelman ratkaisemiseksi yritetään kuvata sitä verkkojen avulla. Annetaan aluksi jokien erottamille maa-alueille ja maa-alueita yhdistäville silloille nimet ja muodostetaan tämän jälkeen alla oikeanpuolisen kuvion mukainen “verkko”, jonka pisteinä ovat maa-alueet  $m, n, k, l$  ja viivoina maa-alueita yhdistävät sillat  $a, b, c, d, e, f, g$ .



Valitettavasti kuvion “verkko” ei ole verkko annetun määritelmän mielessä, koska verkon määritelmästä seuraa, että verkon kahden pisteen välillä voi olla vain yksi

viiva. Saamme määritelmän mukaisen verkon ottamalla pisteiksi sekä kaikki maa-alueet että kaikki sillat ja ottamalla viivoiksi kaikki ne viivat  $\overline{pi}$ , joilla sillan  $i$  toinen pää sijaitsee alueella  $p$ ; tämä verkko on kuvattu alla olevassa kuvassa.



Näemme helposti, että Königsbergin siltojen ongelma palautuu Eulerin kulun etsimiseen yllä kuvatusta verkosta.

Seuraavassa annamme luonnehdinnan Eulerin kulun olemassaololle verkon parillisasteisuuden ja yhtenäisyyden avulla. Kyseisen luonnehdinnan todistamisessa voimme käyttää hyväksi aikaisempia renkaistoja koskevia tuloksia.

**II 3.3 Lemma** *Jos verkossa on Eulerin kierros, niin verkon viivat muodostavat renkaiston.*

**Todistus.** Todistamme väitteen induktiolla verkon viivojen lukumäärän suhteen. Jos viivojen lukumäärä on nolla, niin viivojen joukko on tyhjä ja täten renkaisto. Olkoon nyt  $n > 0$  sellainen luonnollinen luku, että väite pätee niille verkoille, joissa on vähemmän kuin  $n$  viivaa. Näytämme, että väite pätee tällöin myös  $n$ -viivaisille verkoille. Olkoon  $G$   $n$ -viivainen verkko, jossa on Eulerin kierros. Jos  $V_G$  on rengas, niin väite pätee verkolle  $G$ . Oletamme, ettei  $V_G$  ole rengas. Olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  Eulerin kierros verkossa  $G$ . Koska  $V_G$  ei ole rengas, niin kulku  $\bar{x}$  ei ole yksinkertainen. Täten on olemassa sellaiset luvut  $0 < i < j \leq n$ , että  $x_i = x_j$ . Merkitsemme  $\bar{y} = (x_i, \dots, x_j)$  ja  $\bar{z} = (x_1, \dots, x_i) \star (x_j, \dots, x_n)$ ; panemme merkille, että  $\bar{y}$  ja  $\bar{z}$  ovat kierroksia verkossa  $G$ . Koska  $\bar{x}$  on Eulerin kulku  $G$ :ssä, niin on voimassa  $V(\bar{y}) \cap V(\bar{z}) = \emptyset$  ja  $V(\bar{y}) \cup V(\bar{z}) = V_G$ . Merkitsemme  $H$ :lla joukon  $V(\bar{y})$  ja  $K$ :lla joukon  $V(\bar{z})$  virittämää

$G$ :n aliverkkoa; tällöin  $V_H = V(\bar{y})$  ja  $V_K = V(\bar{z})$ . Koska  $\bar{x}$  on Eulerin kierros verkossa  $G$ , niin  $\bar{y}$  on Eulerin kierros verkossa  $H$  ja  $\bar{z}$  on Eulerin kierros verkossa  $K$ . Koska pätee, että  $|V_H| = |V(\bar{y})| < n = v_G$  ja  $|V_K| = |V(\bar{z})| < n = v_G$ , niin induktiooletuksesta seuraa, että joukot  $V_H$  ja  $V_K$  ovat renkaistoja. Tästä seuraa, koska  $V_H \cap V_K = \emptyset$ , että joukko  $V_H \cup V_K = V_G$  on renkaisto.  $\square$

Yhtenäisen verkon tapauksessa pätee myös edellisen tuloksen käänteistulos.

**II 3.4 Lemma** *Jos yhtenäisen verkon viivat muodostavat renkaiston, niin verkossa on Eulerin kierros.*

**Todistus.** Todistamme induktiolla luvun  $n$  suhteen, että jos yhtenäisen verkon viivojen joukko on  $n$ :n erillisen renkaan yhdiste, niin verkossa on Eulerin kierros. Väite pätee triviaalisti tapauksissa  $n = 0$  ja  $n = 1$ . Oletamme nyt, että  $n > 0$  ja että olemme jo todistaneet väitteen niille yhtenäisille verkoille, joiden viivojen joukko on  $n-1$ :n erillisen renkaan yhdiste. Olkoon  $G$  sellainen yhtenäinen verkko, että sen kaikkien viivojen joukolla on esitys  $V_G = \bigcup \mathcal{W}$ , missä  $\mathcal{W}$  on erillinen perhe  $G$ :n renkaita ja  $|\mathcal{W}| = n$ . Todistamme väitteen verkolle  $G$ . Merkitsemme jokaisella  $W \in \mathcal{W}$   $G(W)$ :llä renkaan  $W$  virittämää  $G$ :n aliverkkoa; panemme merkille, että verkko  $G(W)$  on yhtenäinen. On voimassa  $G = \bigvee_{W \in \mathcal{W}} G(W)$  ja tästä seuraa Lemman I 3.11 nojalla, koska  $G$  on yhtenäinen, että joukolla  $\mathcal{W}$  on sellainen esitys  $\mathcal{W} = \{W_i : i = 1, \dots, n\}$ , että jokaisella  $1 < i \leq n$  on voimassa  $P_{G(W_i)} \cap P_{G(W_j)} \neq \emptyset$  jollain  $j < i$ . Merkitsemme  $G' = \bigvee_{i=1}^{n-1} G(W_i)$ . Verkko  $G'$  on lemmän I 3.12 nojalla yhtenäinen. Induktiooletuksen nojalla verkossa  $G'$  on Eulerin kierros  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_k)$ . Olkoon luvulle  $j \leq n-1$  ja  $G$ :n pisteelle  $p$  voimassa  $p \in P_{G(W_n)} \cap P_{G(W_j)}$ . Olkoon  $\bar{z}$  sellainen yksinkertainen kierros verkossa  $G$ , että  $W_n = V(\bar{z})$ ; voimme olettaa, että  $\bar{z}$  on pisteestä  $p$  lähtevä kierros. Koska  $p \in P(G(W_j)) \subset P_{G'} = P(\bar{x})$ , on olemassa sellainen luku  $l \leq k$ , että  $x_l = p$ . Nyt näemme helposti, että jono  $(x_0, \dots, x_l) \star \bar{z} \star (x_l, \dots, x_k)$  on Eulerin kierros verkossa  $G$ .  $\square$

Seuraavassa lauseessa luonnehdimme sellaisia verkkoja, joissa ei ole eristettyjä pisteitä ja joissa on Eulerin kulku. Eristettyjen pisteiden puuttumista koskeva rajoitus ei ole kovin oleellinen, sillä eristetyillä pisteillä ei ole merkitystä Eulerin kulun olemassaololle: jos nimittäin  $G$  ja  $H$  ovat verkkoja, joille pätee, että  $V_G = V_H$ , niin verkossa  $G$  on Eulerin kulku jos ja vain jos verkossa  $H$  on Eulerin kulku.

**II 3.5 Lause** *Olkkoon  $G$  verkko, jossa ei ole eristettyjä pisteitä. Tällöin verkossa  $G$  on Eulerin kierros jos ja vain jos  $G$  on yhtenäinen ja parillisasteinen.*

**Todistus.** *Välttämättömyys.* Jos  $G$ :ssä on Eulerin kierros, niin  $G$  on Lemman II 3.3 ja Korollarin II 2.4 nojalla parillisasteinen; koska  $G$ :ssä ei ole eristettyjä pisteitä, niin Eulerin kierros käy jokaisessa  $G$ :n pisteessä ja  $G$  on täten Lauseen I 4.8 nojalla yhtenäinen.

*Riittävyys.* Lemma II 3.4 ja Korollari II 2.4. □

Luonnehdimme seuraavaksi niitä eristettyjä pisteitä vailla olevia verkkoja, joissa on sellainen Eulerin kulku, joka ei ole kierros.

**II 3.6 Lause** *Olkkoon  $G$  verkko, jolla ei ole eristettyjä pisteitä ja olkoot  $a$  ja  $b$   $G$ :n pisteitä,  $a \neq b$ . Tällöin  $G$ :ssä on Eulerin kulku pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$  jos ja vain jos  $G$  on yhtenäinen, pisteet  $a$  ja  $b$  ovat paritonasteisia ja kaikki muut  $G$ :n pisteet ovat parillisasteisia.*

**Todistus.** Käytämme todistuksessa hyväksi seuraavaa konstruktiota: valitsemme jonkun "pisteen"  $q$ , joka ei kuulu joukkoon  $P_G$  ja määrittelemme uuden verkon  $G'$  asettamalla  $P_{G'} = P_G \cup \{q\}$  ja  $V_{G'} = V_G \cup \{\overline{aq}, \overline{qb}\}$ . Panemme merkille, että koska  $G$ :ssä ei ole eristettyjä pisteitä, niin myöskään verkolla  $G'$  ei ole eristettyjä pisteitä.

*Välttämättömyys.* Oletamme, että verkossa  $G$  on sellainen Eulerin kulku  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$ , että  $x_0 = a$  ja  $x_n = b$ . Näemme helposti, että jono  $(q, x_0, \dots, x_n, q)$  on Eulerin kierros verkossa  $G'$ . Näin ollen  $G'$  Korollarin II 1.9 nojalla parillisasteinen. Jokaisella  $x \in P_G \setminus \{x_0, x_n\}$  on voimassa  $d_G(x) = d_{G'}(x)$ , joten verkko  $G$  on parillisasteinen pisteessä  $x$ . Toisaalta, jos  $y = x_0$  tai  $y = x_n$ , niin  $d_G(y) = d_{G'}(y) - 1$  ja tästä seuraa, että verkko  $G$  on paritonasteinen pisteessä  $y$ . Näin ollen verkossa  $G$  on täsmälleen kaksi paritonasteista pistettä, nimittäin pisteet  $x_0 = a$  ja  $x_n = b$ . Toisaalta, koska  $G$ :ssä ei ole eristettyjä pisteitä, niin Eulerin kulku  $\bar{x}$  käy jokaisessa  $G$ :n pisteessä. Lauseen I 4.8 nojalla verkko  $G$  on yhtenäinen.

*Riittävyys.* Oletamme, että  $G$  on yhtenäinen ja että  $a$  ja  $b$  ovat ainoat  $G$ :n paritonasteiset pisteet. Verkon  $G'$  pisteen  $y$  aste määräytyy seuraavasti. Jos  $y \in P_G \setminus \{a, b\}$ , niin  $d_{G'}(y) = d_G(y)$ . Jos  $y \in \{a, b\}$ , niin  $d_{G'}(y) = d_G(y) + 1$ . Jos  $y = q$ , niin  $d_{G'}(y) = 2$ . Edellisen nojalla verkko  $G'$  on parillisasteinen. Verkon  $G$  yhtenäisyydestä seuraa, että myös verkko  $G$  on yhtenäinen. Korollarin II 1.9 nojalla verkossa

$G'$  on Eulerin kierros  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$ ; voidaan olettaa, että  $\bar{x}$  on  $G'$ :n pisteestä  $q$  lähtevä kierros eli että  $x_0 = x_n = q$ . Koska  $\bar{x}$  on Eulerin kierros, niin on voimassa  $\overline{x_0x_1} \neq \overline{x_{n-1}x_n}$ ; tästä seuraa, koska  $\overline{aq}$  ja  $\overline{qb}$  ovat ainoat verkon  $G'$  viivat, joilla on piste  $q$  toisena päätepisteenä, että on voimassa  $\{x_1, x_{n-1}\} = \{a, b\}$  ja  $x_i \neq q$  jokaisella  $0 < i < n$ . Edellisen nojalla pätee, että

$$\{\overline{x_1x_2}, \dots, \overline{x_{n-2}x_{n-1}}\} = V_{G'} \setminus \{\overline{qa}, \overline{qb}\} = V_G.$$

Edellä esitetystä seuraa, että jono  $\bar{y} = (x_1, \dots, x_{n-1})$  on Eulerin kulku verkossa  $G$ . Koska  $\{x_1, x_{n-1}\} = \{a, b\}$ , niin on voimassa joko  $x_1 = a$  ja  $x_{n-1} = b$  tai  $x_1 = b$  ja  $x_{n-1} = a$ ; ensimmäisessä tapauksessa  $\bar{y}$  on Eulerin kulku  $G$ :ssä pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$  ja jälkimmäisessä tapauksessa  $(x_{n-1}, \dots, x_1)$  on Eulerin kulku  $G$ :ssä pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$ .  $\square$

Korollarin II 2.4 nojalla verkon paritonasteisten pisteiden lukumäärä on parillinen; erityisesti, jos paritonasteisia pisteitä on korkeintaan kaksi kappaletta, niin joko niitä on täsmälleen kaksi kappaletta tai sitten verkko on parillisasteinen. Näin ollen Lauseiden II 3.5 ja II 3.6 tulokset voidaan yhdistää seuraavalla tavalla.

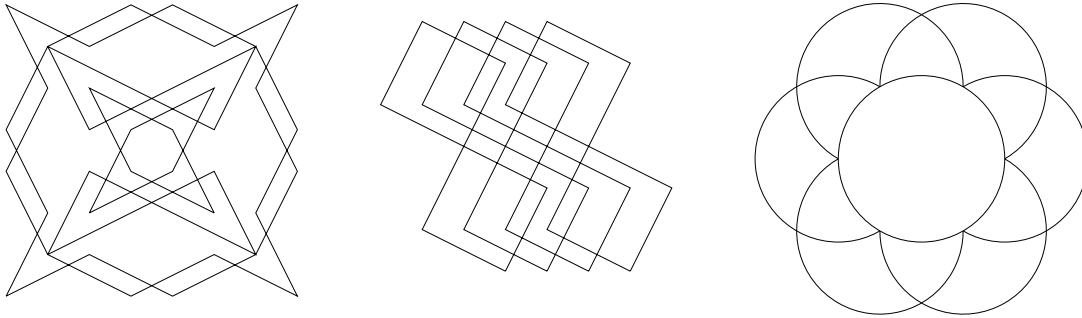
**II 3.7 Korollari** *Eristettyjä pisteitä vailla olevassa verkossa on Eulerin kulku jos ja vain jos verkko on yhtenäinen ja siinä on korkeintaan kaksi paritonasteista pistettä.*

**II 3.8 Esimerkkejä.** (a) Korollarin II 3.9 tuloksesta seuraa, ettei kaikkia Königsbergin siltoja voi ylittää kulkematta jonkun sillan yli useampaan kertaan, sillä Esimerkissä II 3.2 mainitussa verkossa on neljä paritonasteista pistettä.

(b) **Ongelma:** Onko mahdollista suorittaa shakkipelin ratsulla peräkkäin kaikki sallitut siirrot yhteen suuntaan toistamatta mitään siirtoa edes toiseen suuntaan?

**Ratkaisu:** Ongelma palautuu Eulerin kulun etsimiseen shakkipelin hevoseen liittyvästä verkosta  $H$ , jota olemme tarkastelleet aikaisemmissa esimerkeissä. Verkon  $H$  kahdeksalla “nurkkaruudun viereisellä reunaruudulla” on asteena kolme. Täten verkossa  $H$  ei ole Eulerin kulkua ja ongelmassa mainittua tehtävää ei ole mahdollista suorittaa.

(c) Tehtävät, joissa pyydetään piirtämään joku kuvio “yhteen kertaan kynää nostamatta”, palautuvat Eulerin kulkujen etsimiseen kuvioita vastaavista verkoista. Seuraavassa eräitä tällaisia kuvioita:



#### 4. VERKON YKSISUUNTAISTUKSET.

Suhteikon sanotaan olevan *yksisuuntainen*, mikäli siinä ei ole kahta “vastakkais-  
ta” nuolta  $\vec{ab}$  ja  $\vec{ba}$ . Verkko on yksisuuntainen vain siinä triviaalissa tapauksessa,  
että sillä ei ole yhtään viivaa; kuitenkin myös epätriviaaleihin verkkoihin liittyy yk-  
sisuuntaisia suhteikkoja, joiden tarkastelu saattaa selvittää verkon rakennetta.

**Määritelmä** Olkoon  $G$  verkko. Suhteikko  $\vec{G}$  on verkon  $G$  *yksisuuntaistus*, jos  $\vec{G}$   
on yksisuuntainen ja  $\vec{G}^s = G$ .

Määritelmän mukaisesti  $\vec{G}$  on siis  $G$ :n yksisuuntaistus, mikäli  $\vec{G}$  on saatu  $G$ :stä  
valitsemalla jokaisella  $\overline{xy} \in V_G$ , jompikumpi, mutta ei molempia, nuolista  $\overline{xy}$  ja  $\overline{yx}$   
joukkoon  $N_G$ .

Jos  $G$  on yhtenäinen verkko, niin jokainen  $G$ :n yksisuuntaistus on Lauseen I 3.3  
nojalla yhtenäinen. Tarkastelemme nyt eräitä yhtenäisyyttä voimakkaampia ominai-  
suuksia verkkojen yksisuuntaistusten yhteydessä.

Täydellisen verkon jokainen yksisuuntaistus on täydellinen suhteikko, joten Lauseen  
I 5.4 korollaari osoittaa, että täydellisen verkon jokaisella yksisuuntaistuksella on juu-  
ri. Mielivaltaisen yhtenäisen verkon tapauksessa pätee seuraava heikompi tulos.

**II 4.1 Lause** *Olkoon  $G$  yhtenäinen verkko ja olkoon  $a$   $G$ :n piste. Tällöin  $G$ :llä on  
sellainen yksisuuntaistus  $\vec{G}$ , että  $a$  on  $\vec{G}$ :n juuri.*

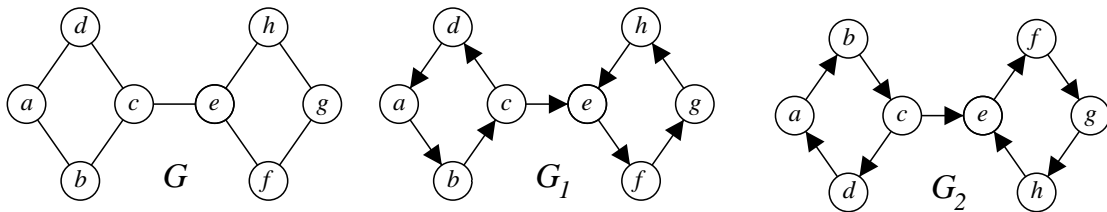
**Todistus.** Koska  $G$  on yhtenäinen, niin jokaisella  $y \in P_G$  on olemassa kulku  $(x_0, \dots, x_n)$  pisteestä  $a$  pisteeseen  $y$ . Merkitään jokaisella  $y \in P_G$ ,  $f(y)$ :llä pienintä lukua  $n \in \mathbb{N}$ , jolla  $G$ :ssä on  $n$ -askeleinen kulku  $a$ :sta  $y$ :hyn.

Jokaisella  $v \in V_G$  valitaan nuoli  $\overrightarrow{a_v b_v}$  siten, että  $\overline{a_v b_v} = v$  ja  $f(a_v) \leq f(b_v)$ . Tällöin suhteikko  $\vec{G}$ , joka määräytyy ehdoista  $P_{\vec{G}} = P_G$  ja  $N_{\vec{G}} = \{\overrightarrow{a_v b_v} : v \in V_G\}$ , on verkon  $G$  yksisuuntaistus.

Osoitetaan, että  $a$  on suhteikon  $\vec{G}$  juuri. Olkoon  $y \vec{G}$ :n piste. Tällöin  $y \in P_G$ , joten  $G$ :ssä on kulku  $(x_0, \dots, x_n)$   $a$ :sta  $y$ :hyn, missä  $n = f(y)$ . Osoitetaan, että  $(x_0, \dots, x_n)$  on myös kulku suhteikossa  $\vec{G}$ . Tehdään vastaväite: on olemassa sellainen  $i \in [n]$ , että  $\overrightarrow{x_{i-1} x_i}$  ei ole suhteikon  $\vec{G}$  nuoli. Koska  $\overline{x_{i-1} x_i} \in V_G$  ja  $\overrightarrow{x_{i-1} x_i} \notin N_{\vec{G}}$ , niin  $\overrightarrow{x_i x_{i-1}} \in N_{\vec{G}}$  ja tästä seuraa joukon  $N_{\vec{G}}$  alkioden valinnan nojalla, että on voimassa  $f(x_i) \leq f(x_{i-1})$ . Koska  $(x_0, \dots, x_{i-1})$  on  $i - 1$  - askeleinen kulku  $G$ :ssä pisteestä  $a$  pisteeseen  $x_{i-1}$ , niin on voimassa  $f(x_{i-1}) \leq i - 1$ . Näin ollen pätee, että  $f(x_i) \leq f(x_{i-1}) \leq i - 1$ . Olkoon  $(y_0, \dots, y_k)$  sellainen kulku  $G$ :ssä  $a$ :sta  $x_i$ :hin, että  $k = f(x_i)$ . Tällöin on voimassa  $k = f(x_i) \leq i - 1$ . Mutta nyt  $(y_0, \dots, y_k, x_{i+1}, \dots, x_n)$  on kulku  $G$ :ssä  $a$ :sta  $y$ :hyn ja tämän kulun askelten lukumäärä on  $k + (n - i) \leq n - 1$ ; tämä on ristiriidassa sen kanssa, että  $n = f(y)$ . Edellisen nojalla vastaväite on väärä ja suhteikossa  $\vec{G}$  on täten kulku  $(x_0, \dots, x_n)$  pisteestä  $a$  pisteeseen  $y$ .  $\square$

Yleensä annetulla yhtenäisellä verkolla on useita eri yksisuuntaistuksia, joilla on annettu verkon piste juurena.

**II 4.2 Esimerkki** Alla molemmat oikealla puolella olevat suhteikot ovat vasemmalla kuvatun verkon  $G$  yksisuuntaistuksia ja kummallakin on  $G$ :n piste  $c$  juurena.





Tietyissä käytännön tilanteissa haluaisimme löytää annetulle (yhtenäiselle) verkolle  $G$  sellaisen yksisuuntaistuksen  $\vec{G}$ , että suhteikossa  $\vec{G}$  voidaan kulkea mistä tahansa pisteestä mihin tahansa muuhun pisteeseen.

Näemme helposti yllä olevassa esimerkissä, että jos  $\vec{G}$  on sellainen  $G$ :n yksisuuntaistus, jolla on piste  $a$  juurena, niin  $G$ :ssä on oltava nuoli  $\vec{ae}$ ; vastaavasti, jos  $\vec{G}$  on sellainen  $G$ :n yksisuuntaistus, jolla on piste  $g$  juurena, niin  $\vec{G}$ :ssä on oltava nuoli  $\vec{eg}$ . Emme siis voi yksisuuntaistaa verkkoa  $G$  siten, että sekä  $a$  että  $g$  olisivat juuria. Näin ollen mikään  $G$ :n yksisuuntaistus ei ole vahvasti yhtenäinen. Luonnehdimme nyt niitä verkkoja, joilla on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus.

**II 4.3 Määritelmä** Verkko  $G$  on *kahdesti yhtenäinen*, mikäli jokaisella  $v \in V_G$ , verkko  $G - v$  on yhtenäinen.

Lemman II 1.2 nojalla saamme seuraavan tuloksen.

**II 4.4 Lause** *Verkko on kahdesti yhtenäinen jos ja vain jos verkko on yhtenäinen ja sen jokainen viiva kuuluu johonkin renkaaseen.*

Seuraava tulos antaa perustelun yllä käyttöönottamallemme nimitykselle.

**II 4.5 Lemma** *Verkko  $G$  on kahdesti yhtenäinen jos ja vain jos jokaisella joukon  $P_G$  aidolla, epätyhjällä osajoukolla  $P$ , verkossa  $G$  on ainakin kaksi viivaa joukkojen  $P$  ja  $P_G \setminus P$  välillä.*

**Todistus.** Harjoitustehtävä. □

**II 4.6 Lause** *Verkolla on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus jos ja vain jos verkko on kahdesti yhtenäinen.*

**Todistus.** *Välttämättömyys.* Oletamme, että verkolla  $G$  on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus  $\vec{G}$ . Osoitamme edellisen lemmän avulla, että verkko  $G$  on kahdesti yhtenäinen. Olkoon  $P$  joukon  $P_G$  epätyhjä aito osajoukko. Koska  $\vec{G}$  on vahvasti yhtenäinen,  $\vec{G}$ :ssä on nuoli  $\vec{ab}$  joukkoon  $P$  ja nuoli  $\vec{cd}$  joukosta  $P$ . On voimassa  $\vec{ab} \neq \vec{cd}$  ja tästä seuraa, koska  $\vec{G}$  on yksisuuntainen, että  $\overline{ab} \neq \overline{cd}$ . Koska  $\vec{G}$  on  $G$ :n yksisuuntaistus, niin  $\overline{ab}$  ja  $\overline{cd}$  ovat  $G$ :n viivoja; lisäksi kumpikin näistä viivoista on joukkojen  $P$  ja  $P_G \setminus P$  välinen viiva. Olemme osoittaneet, että edellisen lemmän ehto toteutuu.

*Riittävyys.* Oletamme, että verkko  $G$  on kahdesti yhtenäinen. Osoitamme, että  $G$ :llä on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus. Väite pätee triviaalisti jos  $|P_G| = 1$ , joten voimme olettaa, että  $|P_G| \neq 1$ . Lauseen II 4.4 nojalla voimme kirjoittaa  $V_G = \bigcup_{i=1}^n R_i$ , missä kukin  $R_i$  on rengas. Jokaisella  $i \in [n]$  on olemassa sellainen yksinkertainen kierros  $\bar{x}^i = (x_0^i, \dots, x_{n_i}^i)$  verkossa  $G$ , että  $R_i = V(\bar{x}^i)$ . Panemme merkille, että  $G$ :ssä ei ole eristettyjä pisteitä ja että täten on voimassa  $P_G = \bigcup_{i=1}^n P(\bar{x}^i)$ .

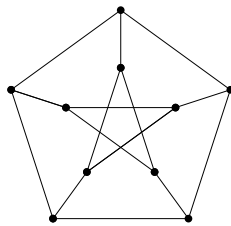
Määrittelemme  $G$ :n yksisuuntaistuksen  $\vec{G}$  seuraavasti. Olkoon  $v$  verkon  $G$  viiva. Merkitsemme  $k$ :llä epätyhjän lukujoukon  $\{i \in [n] : v \in R_i\}$  pienintä lukua. Olkoon  $j \in [n_k]$  se luku, jolle pätee, että  $v = \overrightarrow{x_{j-1}^k x_j^k}$ . Suunnistamme viivan  $v$  valitsemalla nuolen  $\overrightarrow{x_{j-1}^k x_j^k}$  joukkoon  $N_{\vec{G}}$ .

Osoitamme, että  $\vec{G}$  on vahvasti yhtenäinen. Olkoon  $P$  joukon  $P_{\vec{G}} = P_G$  epätyhjä aito osajoukko. Koska  $G$  on yhtenäinen, viivajoukko  $V = \{\overline{pq} \in V_G : p \in P \text{ ja } q \in P_G \setminus P\}$  on epätyhjä. Merkitsemme  $k$ :lla joukon  $\{i \in [n] : V \cap R_i \neq \emptyset\}$  pienintä lukua. Lemman I 4.1(c) nojalla voimme olettaa, että  $\overline{x_0^k x_1^k}$  on joukkojen  $P$  ja  $P_G \setminus P$  välinen viiva. Oletamme, että vaikkapa  $x_0^k \in P$  ja  $x_1^k \notin P$ ; tapauksen  $x_0^k \notin P$  ja  $x_1^k \in P$  voimme käsitellä aivan vastaavasti. Merkitsemme  $j$ :llä suurinta niistä luvuista  $i \in [n_k]$ , joilla  $x_i^k \notin P$ . Panemme merkille, että on voimassa  $j < n_k$ , koska  $x_{n_k}^k = x_0^k \in P$ . Nyt  $\overrightarrow{x_0^k x_1^k}$  on nuoli joukosta  $P$  ja  $\overrightarrow{x_j^k x_{j+1}^k}$  on nuoli joukkoon  $P$ . Lisäksi nämä nuolet kuuluvat joukkoon  $N_{\vec{G}}$ , sillä luvun  $k$  minimaalisuudesta seuraa, ettei kumpikaan joukkojen  $P$  ja  $P_G \setminus P$  välisistä viivoista  $\overline{x_0^k x_1^k}$  ja  $\overline{x_j^k x_{j+1}^k}$  voi kuulua mihinkään joukkoon  $R_i$ , missä  $i < k$ . Olemme osoittaneet, että suhteikko  $\vec{G}$  on vahvasti yhtenäinen.  $\square$

Edellisen lauseen tulos antaa esimerkiksi riittävän ja välttämättömän (joskin teoreettisen) ehdon sille, että jossakin kaupungissa kaikki kadut voitaisiin tehdä yksisuuntaisiksi ilman, että estettäisiin pääsyä mistään paikasta mihinkään toiseen paikkaan.

## HARJOITUSTEHTÄVIÄ LUKUUN II

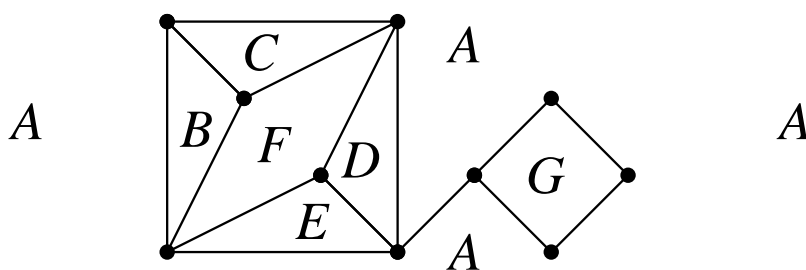
- Näytä, että tetraedriin liittyvässä verkossa (eli verkossa  $K_4$ ) ei ole kahta erillistä rengasta.
- Näytä, että tetraedriin liittyvän verkon renkaiden lukumäärä on seitsemän.
- Osoita, että viiden pisteen täydellisessä verkossa  $K_5$  ei ole kahta keskenään erillistä neliötä (eli 4-rengasta).
- Näytä, että jos verkon  $K_5$  jokainen viiva väritetään joko siniseksi tai punaiseksi, niin väritetystä verkosta löytyy yksivärinen rengas. Päteekö vastaava tulos verkolle  $K_4$ ?
- Olkoon  $A$  joukon  $[n]$   $k$ -osajoukko, missä  $k > 2$ . Näytä, että täydellisessä verkossa  $K_n$ :ssä on täsmälleen  $\frac{(k-1)!}{2}$  sellaista  $k$ -rengasta, joiden viivojen päätepisteet ovat joukossa  $A$ .  
[Ohje: jokaiseen sellaiseen renkaaseen liittyy kaksi joukon  $A$  syklistä permutaatiota.]
- Johda edellisen tehtävän avulla lauseke verkon  $K_n$  renkaiden lukumäärälle. Vertaa lausekteesi antamaa tulosta tapauksessa  $n = 4$  yllä tehtävässä 2 annettuun lukuun.
- Alla olevassa Petersenin verkon  $P$  esityksessä näkyy selvästi uloimpien viivojen muodostama 5-rengas. Nähdään myös helposti että sisimpien viivojen muodostama tähtikuvio on  $P$ :n 5-rengas, joka on erillinen ulommasta 5-renkaasta. Näytä, että vastaava tilanne pätee verkon  $P$  jokaisen 5-renkaan kohdalla (eli että jos  $R$  on mielivaltainen  $P$ :n 5-rengas, niin  $P$ :ssä on  $R$ :stä erillinen 5-rengas).



- Osoita edellisen tehtävän avulla, että Petersenin verkon kaikkien 5-renkaiden joukko voidaan esittää kuuden eri 10-viivaisen renkaiston yhdisteenä.
- Osoita, ettei Petersenin verkossa ole yhtään kolmiota tai neliötä.
- Osoita, että verkko on kaksijakoinen (katso Luvun I harjoitustehtävä 8) jos ja vain jos verkon jokaisessa renkaassa on parillinen määrä viivoja.
- Osoita, että verkko  $G$  on rengasverkko jos ja vain jos  $G$  on yhtenäinen ja 2-säännöllinen (katso Luvun I harjoitustehtävä 23).

12. Osoita, että täydellisen verkon  $K_{2n+1}$  kaikkien viivojen joukolla  $V$  löytyy sellainen esitys renkaistona:  $V = \bigcup_{i=1}^n V(\bar{x}_i)$ , että kulut  $\bar{x}_i$  ovat  $K_{2n+1}$ :n Hamiltonin kierroksia.

Oletetaan, että tasoverkko  $G$  on esitetty yksinkertaisesti tasossa (katso Harjoitustehtävä I 37). Voidaan osoittaa, että esityksen janat jakavat tason äärellisen moneen osaan, joista kullakin on janojen muodostama murtoviiva “reunana”; näistä osista yksi on rajoittamaton ja muut rajoitettuja. Kyseisiä tason osia kutsutaan tasoverkon *alueiksi*. Esimerkiksi alla kuvattu verkko jakaa tason rajoittamattomaan alueeseen  $A$  sekä rajoitettuihin alueisiin  $B, C, D, E, F$  ja  $G$ .



13. Osoita, että tasoverkon jokaista rajoitettua aluetta reunustavan murtoviivan sisältämien janojen joukko (tarkemmin: näitä janoja vastaavien verkon viivojen joukko) on verkon rengas. Osoita, että kaikki nämä renkaat yhdessä virittävät verkon renkaistoryhmän (toisinsanoen, että jokainen verkon renkaisto voidaan esittää muodossa  $R_1 \Delta \cdots \Delta R_k$ , missä  $R_i$ 't ovat alueiden reunoihin liittyviä renkaita). Osoita myös, että nämä “reunarenkaat” ovat toisistaan riippumattomat siinä mielessä, ettei mitään niistä voida esittää muiden reunarenkaiden symmetrisenä erotuksena.
14. Dominopalikan kummassakin päässä on 0 – 6 pistettä. Todista, että kaikki domino-palikat (yksi kutakin tyyppiä) voidaan sovittaa yhteen umpinaiseksi renkaaksi, jossa palikoiden toisiaan koskettavissa päissä on sama pisteluku. Onko tämä mahdollista, jos pisteitä on 0 – 5?

Luonnehdimme edellä Eulerin kulun olemassaoloa vain verkkojen tapauksessa, mutta tuloksilla on myös vastineet yleisille suhteikoille. Olkoon  $S$  suhteikko ja olkoon  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  kulku suhteikossa  $S$ . Sanomme, että  $\bar{x}$  on *Eulerin kulku pitkin suhteikon  $S$  nuolia*, mikäli jokainen  $S$ :n nuoli esiintyy täsmälleen yhden kerran jonossa  $(\overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{n-1}x_n})$ ; jos  $\bar{x}$  on lisäksi kierros, niin sanomme, että se on *Eulerin kierros pitkin suhteikon  $S$  nuolia*.

15. Näytä, että eristettyjä pisteitä vailla olevassa suhteikossa  $S$  on nuolia pitkin kulkeva Eulerin kierros jos ja vain jos  $S$  on yhtenäinen ja  $d_S^+(x) = d_S^-(x)$  jokaisella  $x \in P_S$ .  
[Ohje: muunna Lauseen IV 3.5 todistusta.]
16. Osoita edellisen tehtävän avulla, että jokaisessa yhtenäisessä verkossa on nuolia pitkin kulkeva Eulerin kierros.
17. Osoita, että jos  $S$  on eristettyjä pisteitä vailla oleva suhteikko, niin  $S$ :ssä on nuolia pitkin kulkeva Eulerin kulku  $S$ :n pisteestä  $a$   $S$ :n pisteeseen  $b$ , missä  $a \neq b$ , jos ja vain

jos  $S$  on yhtenäinen,  $d_S^-(a) = d_S^+(a) + 1$ ,  $d_S^+(b) = d_S^-(b) + 1$  ja jokaisella  $x \in P_S \setminus \{a, b\}$  on voimassa  $d_S^+(x) = d_S^-(x)$ .

[Ohje: Tehtävän 15 tulos ja Lauseen IV 3.7 todistus.]

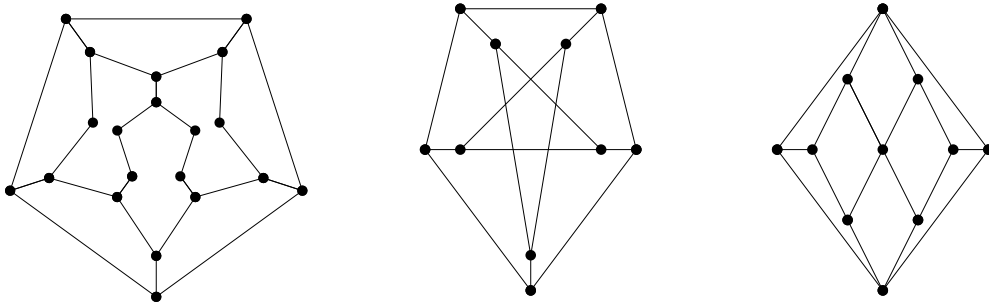
18. Aseta 8 nollaa ja 8 ykköstä renkaaksi niin, että jokainen yhdistelmä 0000, 0001, ..., 1111 esiintyy siinä kerran. (Vihje: Nuolia pitkin kulkeva Eulerin kulku suhteikossa, jonka pisteet ovat 000, 001, ..., 111.)

19. Olkoon  $S$  suhteikko, jolla on pistejoukkona [4] ja yhteysmatriisiina

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Etsi  $S$ :lle a) nuolia pitkin kulkeva Eulerin kulku ja b) Hamiltonin kulku, mikäli sellainen kulku on olemassa.

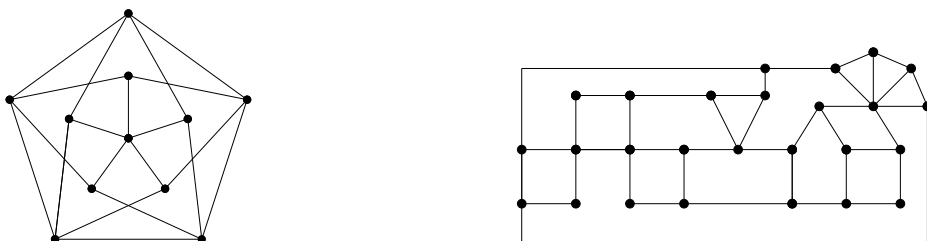
20. Etsi seuraavassa kuvatuille verkoille vahvasti yhtenäiset yksisuuntaistukset.



21. Olkoon  $G$  verkko. Osoita Korollaarin I 2.4 avulla, että jos  $G$  ei jo valmiiksi ole parillisasteinen, niin  $G$  voidaan tehdä parillisasteiseksi "lisäämällä yksi piste", toisin sanoen, on olemassa sellainen parillisasteinen verkko  $H$ , että  $P_G \subset P_H$ ,  $|P_H \setminus P_G| = 1$  ja  $G$  on joukon  $P_G$  virittämä  $H$ :n aliverkko.

22. Osoita Eulerin Lauseen (II 3.5) ja edellisen tehtävän avulla, että jokaisella verkolla  $G$  on sellainen yksisuuntaistus  $\vec{G}$ , että jokaisella  $x \in P_G$  on voimassa  $|d_{\vec{G}}^+(x) - d_{\vec{G}}^-(x)| \leq 1$ .

23. Etsi edellisen tehtävän mukainen yksisuuntaistus seuraaville verkoille:



## Luku III

# Puut

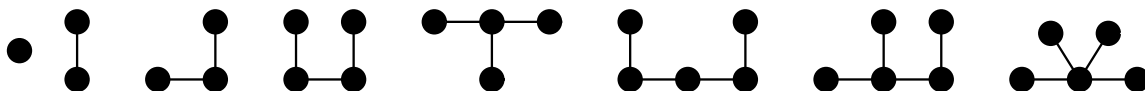
### 1. PUIDEN PERUSOMINAISUUDET.

**III 1.1 Määritelmä** Olkoon  $G$  verkko.

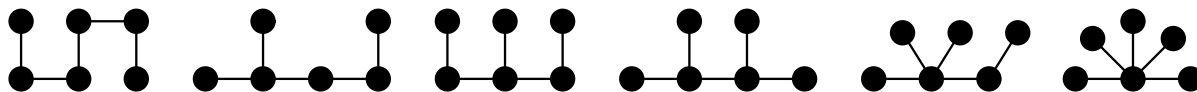
$G$  on *renkaaton*, jos  $G$ :llä ei ole yhtään rengasta.

$G$  on *puu*, jos  $G$  on renkaaton ja yhtenäinen.

**III 1.2 Esimerkki** Seuraava kuva esittää puita, joilla on korkeintaan viisi pistettä:



On helppo nähdä, että kuvassa on esitetty siinä mielessä *kaikki* korkeintaan viisipisteiset puut, että jokainen tällainen puu on isomorfinen jonkun kuvassa näkyvän puun kanssa. Seuraavassa kuvassa on puolestaan esitetty isomorfiaa vaille kaikki erilaiset kuusipisteiset puut.



Aikaisempien tulosten avulla voidaan johtaa tärkeä yhtälö, joka vallitsee puun pisteiden ja viivojen lukumäärien välillä.

**III 1.3 Lause** *Jokaiselle epätyhjälle puulle  $T$  on voimassa yhtälö*

$$v_T = p_T - 1$$

**Todistus.** Olkoon  $T$  puu. Koska  $T$  on yhtenäinen, niin Lauseen III 3.11 nojalla on voimassa epäyhtälö  $v_T \geq p_T - 1$ . Toisaalta, koska  $T$  on renkaaton, niin Lauseen II 1.9 nojalla pätee epäyhtälö  $v_T < p_T$ . Yhdistämällä edelliset kaksi epäyhtälöä saadaan haluttu yhtälö  $v_T = p_T - 1$ .  $\square$

Edellisen lauseen yhtälö ei luonnehdi puita verkkojen joukossa, kuten näemme vaikkapa tarkastelemalla verkkoa  $K_3 \vee (\{4\}, \emptyset)$ , joka koostuu yhdestä kolmiosta sekä yhdestä eristetyistä pisteestä.

**III 1.4 Määritelmä** Puun  $T$  piste  $x$  on  $T$ :n *lehti*, mikäli  $d_T(x) = 1$ .

**III 1.5 Lause A.** *Jos puulla on ainakin kaksi pistettä, niin sillä on ainakin kaksi lehteä.*

**B.** *Jos epätyhjän puun kaikki pisteet ovat lehtiä, niin puussa on täsmälleen kaksi pistettä.*

**Todistus. A.** Olkoon  $T$  puu,  $|P_T| \geq 2$ . Korollarin II 1.5 nojalla  $T$ :llä on sellaiset pisteet  $x$  ja  $y$ , että  $x \neq y$ ,  $d_T(x) \leq 1$  ja  $d_T(y) \leq 1$ . Koska  $T$  on yhtenäinen,  $T$ :ssä ei ole eristettyjä pisteitä; tästä seuraa, että  $d_T(x) = d_T(y) = 1$ .

**B.** Olkoon  $T$  sellainen epätyhjä puu, että jokaisella  $x \in P_T$  on voimassa  $d_T(x) = 1$ . Tällöin on voimassa  $\sum_{x \in P_T} d_T(x) = p_T$ . Lauseen I 2.3 nojalla pätee, että  $\sum_{x \in P_T} d_T(x) = 2 \cdot v_T$ . Edellisestä seuraa, että  $p_T = 2 \cdot v_T$ . Koska Lauseen III 1.3 nojalla pätee, että  $v_T = p_T - 1$ , niin saadaan yhtälö  $p_T = 2 \cdot (p_T - 1)$  ja tästä seuraa vaadittu yhtälö  $p_T = 2$ .  $\square$

Esitetään nyt eräitä välttämättömiä ja riittäviä ehtoja sille, että verkko on puu. Luonnehditaan aluksi puita kulkujen avulla.

**III 1.6 Lause** *Verkko  $G$  on puu jos ja vain jos kaikilla  $x, y \in P_G$ , missä  $x \neq y$ , on olemassa täsmälleen yksi yksinkertainen kulku  $G$ :ssä pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ .*

**Todistus.** Koska  $G$ :ssä on jokaisella  $z \in P_G$  kulku pisteestä  $z$  pisteeseen  $z$ , Lauseen I 4.8 ja Lemman I 4.3 tuloksista seuraa, että  $G$  on yhtenäinen jos ja vain jos kaikilla  $x, y \in P_G$ , missä  $x \neq y$ ,  $G$ :ssä on ainakin yksi yksinkertainen kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ . Toisaalta, Lauseen II 2.7 nojalla,  $G$  on renkaaton jos ja vain jos kaikilla  $x, y \in P_G$ , missä  $x \neq y$ ,  $G$ :ssä on korkeintaan yksi yksinkertainen kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ . Näin ollen  $G$  on yhtenäinen ja renkaaton jos ja vain jos lauseen ehto on voimassa.  $\square$

Annamme seuraavaksi luonnehdinnat puille “minimaalisina yhtenäisinä verkkoina” ja “maksimaalisina renkaattomina verkkoina”. Otamme käyttöön seuraavat nimitykset. Olkoot  $G$  ja  $H$  verkkoja. Jos on voimassa  $P_G = P_H$  ja  $V_G \subsetneq V_H$ , niin sanomme, että  $H$  on saatu lisäämällä  $G$ :hen viivoja tai että  $G$  on saatu poistamalla  $H$ :sta viivoja.

**III 1.7 Lause** *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät epätyhjälle verkolle  $G$ :*

**A.**  $G$  on puu.

**B.**  $G$  on yhtenäinen, mutta jokainen verkko, joka on saatu poistamalla  $G$ :stä viivoja, on epäyhtenäinen.

**C.**  $G$  on renkaaton, mutta jokaisella verkolla, joka on saatu lisäämällä  $G$ :hen viivoja, on rengas.

**Todistus.**  $A \implies B$  ja  $A \implies C$ : Oletetaan, että  $G$  on puu. Tällöin  $G$  on yhtenäinen ja renkaaton ja Lauseen III 1.3 nojalla on voimassa yhtälö  $v_G = p_G - 1$ . Olkoon nyt  $H$  verkko, joka on saatu poistamalla  $G$ :stä viivoja. Tällöin on voimassa  $p_H = p_G$  ja  $v_H < v_G$ , joten  $v_H < v_G = p_G - 1 = p_H - 1$ . Lauseen I 3.13 nojalla verkko  $H$  on epäyhtenäinen. On osoitettu, että ehto B on voimassa. Olkoon  $H'$  verkko, joka on saatu lisäämällä  $G$ :hen viivoja. Tällöin on voimassa  $p'_H = p_G$  ja  $v'_H > v_G$ , joten  $v'_H > v_G = p_G - 1 = p'_H - 1$ . Lauseen II 1.3 nojalla verkolla  $H'$  on rengas. On osoitettu, että ehto C on voimassa.

$B \implies A$ : Oletetaan, että ehto B pätee. Tällöin  $G$  on yhtenäinen, joten  $G$  on puu, mikäli  $G$  on renkaaton. Verkon  $G$  renkaattomuus seuraa Lauseen II 1.1 tuloksesta, sillä jokainen muotoa  $G - v$ , missä  $v \in V_G$ , oleva verkko on saatu poistamalla  $G$ :stä viivoja.

$C \implies A$ : Oletetaan, että ehto C pätee. Tällöin  $G$  on renkaaton, joten  $G$  on puu, mikäli  $G$  on yhtenäinen. Jos  $G$  on täydellinen verkko, niin  $G$  on yhtenäinen. Oletetaan,



ettei  $G$  ole täydellinen. Tällöin on olemassa sellaiset  $G$ :n pisteet  $x$  ja  $y$ , että  $x \neq y$  ja  $\overline{xy} \notin V_G$ . Merkitään  $v = \overline{xy}$  ja määritellään verkko  $H$  asettamalla  $P_H = P_G$  ja  $V_H = V_G \cup \{v\}$ . Tällöin verkko  $H$  on saatu verkosta  $G$  viivoja lisäämällä, joten verkossa  $H$  on rengas  $W$ . Koska verkko  $G$  on renkaaton, nähdään että  $v \in W$ . Lauseen II 1.1 nojalla verkko  $H - v$  on yhtenäinen. Koska  $H - v = G$ , on osoitettu, että verkko  $G$  on yhtenäinen.  $\square$

**III 1.8 Korollaari** *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät epätyhjälle verkolle  $G$ :*

- A.  $G$  on puu.
- B.  $G$  on yhtenäinen ja  $v_G \leq p_G - 1$ .
- C.  $G$  on renkaaton ja  $v_G \geq p_G - 1$ .

**Todistus.** Puun määritelmän ja Lauseen III 1.3 nojalla on voimassa  $A \implies B$  ja  $A \implies C$ .

$B \implies A$ : Oletetaan, että ehto B on voimassa. Osoitetaan, että tällöin edellisen lauseen ehto B on voimassa. Olkoon  $H$  verkko, joka on saatu poistamalla  $G$ :stä viivoja. Tällöin on voimassa  $v_H < v_G$  ja  $p_H = p_G$ , joten  $v_H < v_G \leq p_G - 1 = p_H - 1$ . Edellisestä seuraa Lauseen I 3.13 nojalla, että verkko  $H$  on epäyhtenäinen. On näytetty, että edellisen lauseen ehto B on voimassa; lauseen nojalla verkko  $G$  on puu.

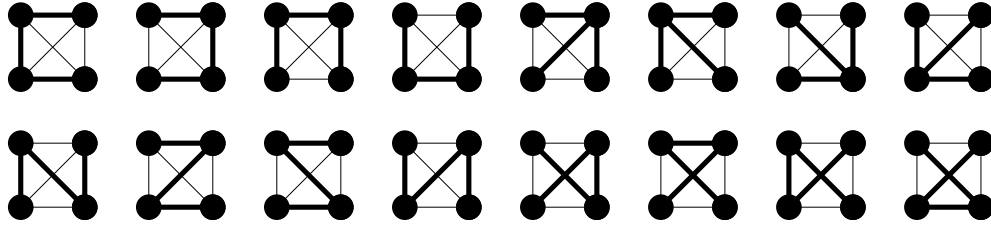
$C \implies A$ : Oletetaan, että ehto C on voimassa. Osoitetaan, että tällöin edellisen lauseen ehto C pätee. Olkoon  $H$  verkko, joka on saatu lisäämällä  $G$ :hen viivoja. Tällöin  $v_H > v_G$  ja  $p_H = p_G$ , joten  $v_H > v_G \geq p_G - 1 = p_H - 1$ . Edellisestä seuraa Lauseen II 1.3 nojalla, että verkossa  $H$  on rengas. On näytetty, että  $G$  toteuttaa edellisen lauseen ehdon C; kyseisen lauseen nojalla  $G$  on puu.  $\square$

## 2 VIRITTÄVÄT PUUT.

Puita voidaan käyttää hyväksi myös sellaisten verkkojen tapauksessa, jotka eivät ole puita. Otetaan käyttöön seuraava käsite.

**III 2.1 Määritelmä** Olkoon  $G$  verkko. Verkon  $G$  aliverkko  $H$  on  $G$ :n *virittävä puu*, mikäli  $H$  on puu ja  $P_H = P_G$ .

**III 2.2 Esimerkki** Alla on esitetty täydellisen neljän pisteen verkon virittäviä puita:



**III 2.3 Lause** Verkolla  $G$  on virittävä puu jos ja vain jos  $G$  on yhtenäinen.

**Todistus.** *Välttämättömyys.* Oletamme, että  $G$ :llä on virittävä puu  $H$ . Koska  $H$  on  $G$ :n yhtenäinen aliverkko, jolle pätee, että  $P_H = P_G$ , näemme verkon  $G$  olevan yhtenäinen.

*Riittävyys.* Oletamme, että  $G$  on yhtenäinen. Merkitsemme

$$\mathcal{H} = \{H < G : H \text{ on yhtenäinen ja } P_H = P_G\}.$$

Panemme merkille, että on voimassa  $\mathcal{H} \neq \emptyset$  koska  $G \in \mathcal{H}$ . Merkitsemme  $n$ :llä lukujoukon  $\{v_H : H \in \mathcal{H}\}$  pienintä lukua. Olkoon  $T$  sellainen joukon  $\mathcal{H}$  alkio, että  $v_T = n$ . Osoitamme, että  $T$  on  $G$ :n virittävä puu. Koska  $T \in \mathcal{H}$ , on voimassa yhtälö  $P_T = P_G$ ; näinollen  $T$  on  $G$ :n virittävä puu, mikäli  $T$  on puu. Käytämme tämän osoittamiseen Lauseen III 1.7 ehdon B antamaa puiden luonnehdintaa. Koska  $T \in \mathcal{H}$ , verkko  $T$  on yhtenäinen. Olkoon nyt  $L$  verkko, joka on saatu poistamalla  $T$ :stä viivoja. Tällöin on voimassa  $v_L < v_T = n$ , joten luvun  $n$  määritelmästä seuraa, että  $L \notin \mathcal{H}$ ; tästä puolestaan seuraa, koska  $P_L = P_T = P_G$ , että verkko  $L$  ei ole yhtenäinen. Olemme osoittaneet, että Lauseen III 1.7 ehto B on voimassa. Verkko  $T$  on kyseisen lauseen nojalla puu.  $\square$

Yllä esitetty todistus antaa seuraavan menetelmän yhtenäisen verkon  $G$  virittävän puun löytämiseksi: poistetaan  $G$ :stä viivoja niin pitkään kuin tämä on mahdollista tekemättä saatavaa verkkoa epäyhtenäiseksi; viimeiseksi saatu verkko on  $G$ :n virittävä puu. Toinen menetelmä, joka perustuu Lauseen III 1.7 ehtoon C, on seuraava: aloitetaan verkosta  $(P_G, \emptyset)$  ja lisätään viivoja joukosta  $V_G$  niin kauan kuin tämä on mahdollista ilman, että saatavassa verkossa on yhtään rengasta.

Jokaisella puulla on vain yksi virittävä puu, mutta yleensä yhtenäisellä verkolla on useampia eri virittäviä puita. Lasketaan nyt montako virittävää puuta  $n$ -pisteisellä yhtenäisellä verkolla voi olla, toisin sanoen, lasketaan täydellisen verkon  $K_n$  virittävien puiden lukumäärä. Todistetaan ensin eräitä aputuloksia.

**III 2.4 Lemma** *Olkoon  $T$  puu, jossa on vähintään kolme pistettä ja olkoon  $A \subset P_T$  joukko  $T$ :n lehtiä. Tällöin joukon  $P_T \setminus A$  virittämä  $T$ :n aliverkko  $T'$  on puu. Lisäksi on olemassa sellainen kuvaus  $f : A \rightarrow P_T \setminus A$ , että  $V_T = V_{T'} \cup \{\overline{af(a)} : a \in A\}$ .*

**Todistus.** Osoitamme aluksi kuvauksen  $f$  olemassaolon. Olkoon  $a$  joukon  $A$  alkio. Tällöin  $a$  on  $T$ :n lehti, joten on olemassa täsmälleen yksi sellainen  $x \in P_T$ , että  $\overline{ax} \in V_T$ ; merkitsemme tätä alkioa  $x$   $f(a)$ :lla. Osoitamme, että  $f(a) \notin A$ . Yhtenäisessä verkossa  $T$  on viiva  $v$  epätyhjien joukkojen  $\{a, f(a)\}$  ja  $P_T \setminus \{a, f(a)\}$  välillä. Koska  $\overline{af(a)} \in V_T$ ,  $T$ :n lehti  $a$  ei voi olla viivan  $v$  päätepisteenä ja tästä seuraa, että  $f(a)$  on  $v$ :n päätepiste. Edellisen nojalla pätee, että  $f(a)$  ei ole  $T$ :n lehti; täten  $f(a) \notin A$ . Olemme osoittaneet, että  $f$  on kuvaus  $A \rightarrow P_T \setminus A$ . Joukossa  $\{\overline{af(a)} : a \in A\}$  ovat kaikki ne  $T$ :n viivat, joilla on päätepiste joukossa  $A$ ; koska kaikki muut  $T$ :n viivat ovat joukon  $P_T \setminus A$  virittämän  $T$ :n aliverkon viivoja, on voimassa  $V_T = V_{T'} \cup \{\overline{af(a)} : a \in A\}$ .

Renkaattoman verkon  $T$  aliverkko  $T'$  on renkaaton, joten  $T'$  on puu, mikäli  $T'$  on yhtenäinen. Olkoon  $P$  joukon  $P_{T'}$  epätyhjä, aito osajoukko. Merkitsemme  $P' = P \cup \{a \in A : f(a) \in P\}$  ja panemme merkille, että  $P'$  on joukon  $P_T$  epätyhjä ja aito osajoukko. Yhtenäisessä verkossa  $T$  on sellainen viiva  $\overline{xy}$ , että  $x \in P'$  ja  $y \in P_T \setminus P'$ . Jokaisella  $a \in A \cap P'$  on voimassa  $f(a) \in P'$  ja tästä seuraa, että  $x \notin A$ ; vastaavasti, jokaisella  $a \in A \setminus P'$  on voimassa  $f(a) \notin P'$  ja tästä seuraa, että  $y \notin A$ . Edellisen nojalla pätee, että  $x \in P$  ja  $y \in P_{T'} \setminus P$ ; koska tästä seuraa myös, että  $\overline{xy} \in V_{T'}$ , olemme näyttäneet  $T'$ :n olevan yhtenäinen.  $\square$

**III 2.5 Lemma** *Olkoon  $S$  epätyhjä puu, olkoon  $A$  sellainen joukko, että  $A \cap P_S = \emptyset$  ja olkoon  $f$  kuvaus  $A \rightarrow P_S$ . Tällöin ehtojen  $P_G = P_S \cup A$  ja  $V_G = V_S \cup \{\overline{af(a)} : a \in A\}$  määräämä verkko  $G$  on puu ja jokainen  $A$ :n alkio on puun  $G$  lehti.*

**Todistus.** Panemme merkille, että on voimassa  $p_G = p_S + |A|$  ja  $v_G = v_S + |A|$  ja näinollen  $p_G - v_G = p_S - v_S$ . Lauseen III 1.3 nojalla on voimassa  $p_S - v_S = 1$ . Edellisen nojalla pätee, että  $p_G - v_G = 1$  ja tästä seuraa Korollarin III 1.8 nojalla,

että  $G$  on puu, mikäli  $G$  on yhtenäinen. Olkoon  $p$  joku puun  $S$  piste. Osoitamme, että jokaisella  $x \in P_G$ ,  $G$ :ssä on kulku pisteestä  $x$  pisteeseen  $p$ . Jos  $x \in P_S$ , niin tällöin  $S$ :ssä on kulku  $\bar{x}$  pisteestä  $x$  pisteeseen  $p$  ja  $\bar{x}$  on myös kulku verkossa  $G$ . Jos taas  $x \in A$ , niin tällöin  $S$ :ssä on kulku  $(x_0, \dots, x_n)$  pisteestä  $f(x)$  pisteeseen  $p$  ja tässä tapauksessa  $(x, x_0, \dots, x_n)$  on kulku  $G$ :ssä  $x$ :stä  $p$ :hen. Olemme näyttäneet, että jokaisella  $x \in P_G$ ,  $G$ :ssä on kulku  $x$ :stä  $p$ :hen; tästä seuraa Lauseen I 4.8 nojalla, että  $G$  on yhtenäinen.

Edellä esitetyn nojalla  $G$  on puu. Jokaisella  $a \in A$ , piste  $a$  on  $G$ :n lehti, sillä  $\overline{af(a)}$  on ainoa  $G$ :n viiva, jolla on  $a$  päätepisteenä.  $\square$

Käyttämällä hyväksi edellisiä lemmoja sekä summa- ja erotusperiaatetta voimme nyt määrittää täydellisen verkon virittävien puiden lukumäärän.

**III 2.6 Lause** *Jokaisella  $n \in \mathbb{N}^*$ , verkon  $K_n$  virittävien puiden lukumäärä on  $n^{n-2}$ .*

**Todistus.** Merkitsemme jokaisella  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\pi_n$ :llä verkon  $K_n$  virittävien puiden lukumäärää ja panemme merkille, että jokaisessa  $n$ -pisteisessä täydellisessä verkossa on sama määrä virittäviä puita. Osoitamme induktiolla luvun  $n$  suhteen, että jokaisella  $n \in \mathbb{N}^*$  on voimassa  $\pi_n = n^{n-2}$ .

Verkot  $K_1$  ja  $K_2$  ovat puita, joten on voimassa  $\pi_1 = \pi_2 = 1$ ; näinollen yhtälö  $\pi_k = k^{k-2}$  pätee, kun  $k = 1, 2$ .

Olkoon nyt  $n > 2$  sellainen luku, että jokaisella  $k < n$  on voimassa  $\pi_k = k^{k-2}$ . Osoitamme summa- ja erotusperiaatteen (Lause A 2.5) avulla, että on voimassa  $\pi_n = n^{n-2}$ . Merkitsemme  $\mathcal{T}$ :llä verkon  $K_n$  kaikkien virittävien puiden muodostamaa kokoelmaa ja merkitsemme  $\mathcal{T}_a = \{T \in \mathcal{T} : a \text{ on puun } T \text{ lehti}\}$  jokaisella  $a \in [n]$ . Merkitsemme edelleen  $\mathcal{T}_A = \bigcap_{a \in A} \mathcal{T}_a$  jokaisella  $\emptyset \neq A \subset [n]$ . Lauseen III 1.5 nojalla on voimassa  $\mathcal{T} = \bigcup_{a \in [n]} \mathcal{T}_a$ . Summa- ja erotusperiaatteen nojalla on voimassa

$$\pi_n = |\mathcal{T}| = \sum_{\emptyset \neq A \subset [n]} (-1)^{|A|+1} |\mathcal{T}_A|. \quad (*)$$

Osoitamme, että jokaisella  $\emptyset \neq A \subset [n]$  on voimassa  $|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{n-2}$ . Yhtälö pätee, jos  $A = [n]$ , sillä tässä tapauksessa  $\mathcal{T}_A = \emptyset$  Lauseen III 1.5 ja epäyhtälön  $n > 2$  nojalla. Olkoon nyt  $A$  joukon  $[n]$  epätyhjä aito osajoukko. Puu  $T \in \mathcal{T}$  kuuluu joukkoon  $\mathcal{T}_A$  jos ja vain jos jokainen  $A$ :n alkio on  $T$ :n lehti. Edellisen ja Lemman III 2.4 nojalla on jokaisella  $T \in \mathcal{T}_A$  olemassa sellainen kuvaus  $f_T : A \rightarrow [n] \setminus A$  ja sellainen

puu  $S(T)$ , että  $P_{S(T)} = [n] \setminus A$  ja  $V_T = V_{S(T)} \cup \{\overline{af_T(a)} : a \in A\}$ . Merkitsemme  $\mathcal{S}$ :llä täydellisen verkon  $K_{[n] \setminus A}$  virittävien puiden muodostamaa joukkoa ja panemme merkille, että jokaisella  $T \in \mathcal{T}_A$  on voimassa  $S(T) \in \mathcal{S}$ . Määrittelemme kuvauksen  $\psi : \mathcal{T}_A \rightarrow ([n] \setminus A)^A \times \mathcal{S}$  asettamalla  $\psi(T) = (f_T, S(T))$  jokaisella  $T \in \mathcal{T}_A$ . Kuvaus  $\psi$  on injektio, koska jokainen  $T \in \mathcal{T}_A$  määräytyy kuva-alkiostaan  $\psi(T)$  ehtojen  $P_T = [n]$  ja  $V_T = V_{S(T)} \cup \{\overline{af_T(a)} : a \in A\}$  kautta. Kuvaus  $\psi$  on myös surjektio, sillä jokaisella  $(f, S) \in ([n] \setminus A)^A \times \mathcal{S}$ , jos määrittelemme verkon  $G$  kuten Lemmassa III 2.5, niin tällöin kyseisen lemmän nojalla pätee, että  $G \in \mathcal{T}_A$  ja toisaalta näemme helposti, että on voimassa  $\psi(G) = (f, S)$ . Edellisen nojalla kuvaus  $\psi$  on bijektio. Täten on voimassa  $|\mathcal{T}_A| = |([n] \setminus A)^A \times \mathcal{S}|$  ja näinollen  $|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{|A|} \cdot |\mathcal{S}|$ . Lisäksi pätee, että  $|\mathcal{S}| = \pi_{n-|A|}$ . Koska  $0 < n - |A| < n$ , induktio-oletuksesta seuraa, että  $\pi_{n-|A|} = (n - |A|)^{n-|A|-2}$ . Edellä esitetyn nojalla on voimassa

$$|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{|A|} \cdot (n - |A|)^{n-|A|-2} = (n - |A|)^{n-2}.$$

Koska jokaiselle  $\emptyset \neq A \subset [n]$  on voimassa  $|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{n-2}$  ja koska jokaisella  $i \in [n]$ , joukon  $[n]$   $i$ -alkioisten osajoukkojen lukumäärä on  $\binom{n}{i}$ , saamme yhtälön (\*) nojalla yhtälön  $\pi_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)^{n-2}$ . Voimme kirjoittaa viimeisen yhtälön oikean puolen muotoon  $n^{n-2} - \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^{n-2}$ . Koska Korollarin A 2.8 nojalla pätee, että  $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^{n-2} = 0$ , saamme halutun yhtälön  $\pi_n = n^{n-2}$ .  $\square$

Voimme käyttää verkon virittäviä puita hyväksi tutkiessamme verkon renkaita ja renkaistoja.

**III 2.7 Lemma** *Olkoon  $T$  verkon  $G$  virittävä puu ja olkoon  $v$  joukon  $V_G \setminus V_T$  alkio. Tällöin on olemassa sellainen  $G$ :n rengas  $R$ , että  $R \setminus V_T = \{v\}$ .*

**Todistus.** Olkoon  $v = \overline{xy}$ . Tällöin  $x \neq y$  ja  $x, y \in P_G = P_T$ . Lauseen III 1.6 nojalla verkossa  $T$  on yksinkertainen kulku  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$ . Koska  $T$  on  $G$ :n aliverkko, niin  $\bar{x}$  on kulku myös verkossa  $G$ . Koska  $\overline{x_n x_0} = v \in V_G$ , niin jono  $\bar{x}' = (x_0, \dots, x_n, x_0)$  on kierros verkossa  $G$ . Kulun  $\bar{x}$  yksinkertaisuudesta seuraa, että myös kierros  $\bar{x}'$  on yksinkertainen. Koska  $\overline{x_0 x_1} \in V_T$  ja  $\overline{x_0 x_n} = v \notin V_T$ , niin on voimassa  $x_n \neq x_1$  ja täten  $n > 1$ . Edellisen nojalla kierros  $\bar{x}'$  on vähintään kolmiaskeleinen; näin ollen joukko  $R = V(\bar{x}')$  on  $G$ :n rengas. Lisäksi on voimassa  $R \setminus V_T = V(\bar{x}') \setminus V(\bar{x}) = \{\overline{x_n x_0}\} = \{v\}$ .  $\square$

Osoitamme nyt, että edellisessä lemmassa mainittu rengas on yksikäsitteisesti määrätty.

**III 2.8 Lemma** *Olkoon  $T$  verkon  $G$  virittävä puu ja olkoot  $Q$  ja  $Q'$  sellaisia  $G$ :n renkaistoja, että  $Q \setminus V_T = Q' \setminus V_T$ . Tällöin  $Q = Q'$ .*

**Todistus.** Lauseen II 2.5 nojalla joukko  $Q \Delta Q'$  on  $G$ :n renkaisto. Koska  $Q \setminus V_T = Q' \setminus V_T$ , niin  $Q \Delta Q' \subset V_T$ . Täten  $Q \Delta Q'$  on puun  $T$  renkaisto. Koska  $T$  on renkaaton, niin renkaisto  $Q \Delta Q'$  on tyhjä; tästä seuraa Korollaarin A 1.13 nojalla, että  $Q = Q'$ .  
□

Olkoon  $T$  verkon  $G$  virittävä puu. Merkitsemme jokaisella  $v \in V_G \setminus V_T$ ,  $R(v, T)$ :llä Lemmojen III 2.7 ja III 2.8 yksikäsitteiseksi osoittamaa  $G$ :n rengasta. Kutsomme näitä renkaita  $R(v, T)$ ,  $v \in V_G \setminus V_T$ , verkon  $G$  *perusrenkaiksi* virittävän puun  $T$  suhteen.

**III 2.9 Lause** *Olkoon  $T$  verkon  $G$  virittävä puu ja olkoon  $V$  joukon  $V_G \setminus V_T$  osajoukko. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi sellainen  $G$ :n renkaisto  $Q$ , että  $Q \setminus V_T = V$ .*

**Todistus.** Renkaiston  $Q$  yksikäsitteisyys seuraa Lemman III 2.8 tuloksesta, joten riittää todistaa  $Q$ :n olemassaolo. Esitämme joukon  $V$  muodossa,  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , missä  $v_i \neq v_j$  kun  $i \neq j$ . Merkitsemme  $Q = R(v_1, T) \Delta \dots \Delta R(v_n, T)$  ja panemme merkille, että koska joukot  $R(v_i, T)$ ,  $i \in [n]$ , ovat  $G$ :n renkaita, niin joukko  $Q$  on Lauseen II 2.5 nojalla  $G$ :n renkaisto. Osoitamme, että  $Q \setminus V_T = V$ . Olkoon  $w$  joukon  $V_G \setminus V_T$  alkio. Tällöin jokaiselle  $i \in [n]$  pätee Lemman III 2.7 nojalla, että  $w \in R(v_i, T) \iff v_i = w$ ; tästä seuraa Lemman A 1.14 nojalla, että on voimassa

$$\begin{aligned} w \in Q &\iff |\{i \in [n] : w \in R(v_i, T)\}| \text{ pariton} \\ &\iff |\{i \in [n] : v_i = w\}| = 1 \\ &\iff \exists \text{ sellainen } i \in [n], \text{ että } v_i = w \\ &\iff w \in V . \end{aligned}$$

Edellä esitetyn nojalla on voimassa  $Q \setminus V_T = V$ . □

Yllä oleva todistus osoittaa, että yhtenäisen verkon virittävään puuhun liittyvät perusrenkaat "virittävät"  $G$ :n renkaistoryhmän  $(\mathcal{R}(G), \Delta)$ :

**III 2.10 Korollaari** *Olkoon  $T$  yhtenäisen verkon  $G$  virittävä puu ja olkoon  $Q$  verkon  $G$  renkaisto. Tällöin joukossa  $V_G \setminus V_T$  on sellaiset viivat  $v_1, \dots, v_n$ , että  $Q = R(v_1, T) \Delta \cdots \Delta R(v_n, T)$ .*

Lauseen III 2.9 avulla voimme määrätä yhtenäisen verkon renkaistojen lukumäärän. Olkoon  $T$  yhtenäisen verkon  $G$  virittävä puu. Lauseen III 2.9 nojalla on olemassa sellainen kuvaus  $\varphi : \mathcal{P}(V_G \setminus V_T) \rightarrow \mathcal{R}(G)$ , että jokaisella  $V \in \mathcal{P}(V_G \setminus V_T)$  on voimassa  $\{Q \in \mathcal{R}(G) : Q \setminus V_T = V\} = \{\varphi(V)\}$ . Kuvaus  $\varphi$  on selvästi-kin injektio, mutta se on myös surjektio, sillä Lauseen III 2.9 nojalla jokaiselle  $Q \in \mathcal{R}(G)$  pätee, että  $Q = \varphi(Q \setminus V_T)$ . Näinollen kuvaus  $\varphi$  on bijektio ja on voimassa  $|\mathcal{R}(G)| = |\mathcal{P}(V_G \setminus V_T)| = 2^{|V_G \setminus V_T|}$ . Koska Lauseen III 1.3 nojalla on voimassa  $|V_G \setminus V_T| = v_G - v_T = v_G - (p_T - 1) = v_G - p_G + 1$ , niin saamme seuraavan tuloksen.

**III 2.11 Korollaari** *Yhtenäiselle verkolle  $G$  on voimassa*

$$|\mathcal{R}(G)| = 2^{v_G - p_G + 1}$$

### 3. SUUNNATUT PUUT.

Puita esiintyy mitä erilaisimmissa yhteyksissä (sukupuut, etsintäpuut,...). Usein puun kaikki pisteet eivät ole tarkastelun kannalta samanarvoisia, vaan joku niistä on valittu “alkupisteeksi” (yhteinen esi-isä tai -äiti, etsinnän alkutilanne,...). “Alkupisteen” valinnan lisäksi on käytännössä esiintyvissä puissa usein myös määrätty puun viivoille suunnistus ja tällöin puu tulisi itse asiassa esittää suhteikkona, jolla on “alkupiste” juurena ja jossa nuolet osoittavat “alkupisteestä pois päin”. Seuraavassa lauseessa osoitamme, että kyseisenlainen suunnistus määräytyy yksikäsitteisesti puun rakenteen ja “alkupisteen” valinnan nojalla.

Olkoon  $a$  puun  $T$  piste. Koska  $T$  on yhtenäinen verkko, niin Lause II 4.1 osoittaa, että  $T$ :llä on sellainen yksisuuntaistus  $\vec{T}$ , että piste  $a$  on suhteikon  $\vec{T}$  juuri. Osoitamme nyt, että tällaisia yksisuuntaistuksia on ainoastaan yksi.

**III 3.2 Lause** *Olkoon  $a$  puun  $T$  piste. Tällöin  $T$ :llä on täsmälleen yksi sellainen yksisuuntaistus  $\vec{T}$ , että  $a$  on  $\vec{T}$ :n juuri.*

**Todistus.** Yllä jo totesimme, että mainitun kaltaisia yksisuuntaistuksia on ainakin yksi, joten riittää näyttää, ettei niitä ole useampia. Teemme vastaväitteen:  $T$ :llä on kaksi eri yksisuuntaistusta  $R$  ja  $S$ , joilla kummallakin on piste  $a$  juurena. Koska  $R \neq S$ , niin on olemassa sellainen  $T$ :n viiva  $v = \overline{xy}$ , että  $\overline{xy} \in N_R$  ja  $\overline{yx} \in N_S$ . Lauseen III 1.7 nojalla verkko  $T - v$  on epäyhtenäinen. Merkitsemme  $C$ :llä pisteen  $a$  yhtenäistä komponenttia verkossa  $T - v$ . Panemme merkille, että on voimassa  $a \in C \not\subseteq P_{T-v}$  ja että verkossa  $T - v$  ei ole joukkojen  $C$  ja  $P_{T-v} \setminus C$  välistä viivaa. Koska  $T$  on yhtenäinen ja  $P_T = P_{T-v}$ , verkossa  $T$  on joukkojen  $C$  ja  $P_T \setminus C$  välinen viiva  $w$ . Koska  $w$  ei ole verkon  $T - v$  viiva, on voimassa  $w = v$ . Näinollen on voimassa joko  $x \in C$  ja  $y \notin C$  tai  $x \notin C$  ja  $y \in C$ . Oletetaan, että vaikkapa  $x \in C$  ja  $y \notin C$ . Koska  $a$  on suhteikon  $S$  juuri, suhteikossa  $S$  on Lemman I 4.3 nojalla yksinkertainen kulku  $\bar{z} = (z_0, \dots, z_n)$  pisteestä  $a$  pisteeseen  $y$ . Koska  $z_0 \in C$  ja  $z_n \notin C$ , on olemassa sellainen  $j \in [n]$ , että  $z_{j-1} \in C$  ja  $z_j \notin C$ . Näytetään, että  $\overline{z_{j-1}z_j} \neq v$ . Koska suhteikossa  $S$  ei ole nuolta  $\overline{xy}$ , niin on voimassa  $z_{n-1} \neq x$  ja täten  $\overline{z_{n-1}z_n} \neq v$ ; toisaalta, jos  $j < n$ , niin kulun  $\bar{z}$  yksinkertaisuudesta seuraa, että on voimassa  $z_j \neq y$  ja täten  $\overline{z_{j-1}z_j} \neq v$ . Edellisen nojalla pätee, että  $\overline{z_{j-1}z_j} \neq v$ . Näin ollen  $\overline{z_{j-1}z_j}$  on verkon  $T - v$  viiva. Tämä on kuitenkin ristiriidassa sen kanssa, että verkossa  $T - v$  ei ole joukkojen  $C$  ja  $P_{T-v} \setminus C$  välistä viivaa. Tämä ristiriita osoittaa, että vastaväite on väärä; näinollen  $T$ :llä on vain yksi yksisuuntaistus, jolla on piste  $a$  juurena.  $\square$

Lauseen III 4.1 todistus antaa menetelmän edellisen lauseen yksikäsitteiseksi osoittaman yksisuuntaistuksen löytämiseksi: viiva  $v \in V_T$  korvataan sillä nuolella  $\overline{xy}$ , jolle pätee, että  $\overline{xy} = v$  ja piste  $x$  on verkossa  $T$  "lähempänä" pistettä  $a$  kuin piste  $y$ . Havainnollisempi tapa kyseisen yksisuuntaistuksen löytämiseksi on seuraava: otamme puusta kiinni pisteen  $a$  kohdalta ja ravistelemme, kunnes kaikki puun viivat roikkuvat pystysuorassa; tämän jälkeen suuntaamme viivat siten, että saamamme nuolet osoittavat alaspäin.

Seuraavassa käytämme merkintää  $\vec{T}_{(a)}$  sille puun  $T$  yksisuuntaistukselle, jolla on piste  $a$  juurena. Kutsumme muotoa  $\vec{T}_{(a)}$  olevia suhteikkoja suunnatuiksi puiksi.

**III 3.3 Määritelmä** *Suunnattu puu* on sellainen yksisuuntainen juurellinen suhteikko  $J$ , että  $J$ :n määräämä symmetrinen suhteikko  $J^s$  on puu.



Suunnatusta puusta käytämme yleensä muotoa  $\vec{T}$  olevaa merkintää, jolloin  $T$  tarkoittaa jotain puuta ja  $\vec{T}$  jotain sen juurellista yksisuuntaistusta. Panemme merkille, että suunnatulla puulla on vain yksi juuri: tämä seuraa yksisuuntaisuudesta sekä siitä tuloksesta (Lause III 1.6), että puun pisteestä toiseen on olemassa vain yksi yksinkertainen kulku.

Termi “juuri” on verraten vakiintunut. Huolimatta tähän terminologiaan liittyvistä mielikuvista, suunnatut puut kuvataan usein siten, että “juuri” tulee piirrettävän kuvion ylimmäiseksi pisteeksi.

Otamme nyt käyttöön lisää suunnattuihin puihin liittyvää havainnollista sanastoa.

**III 3.3 Määritelmä** Suunnatun puun  $\vec{T}$  piste  $b$  on  $\vec{T}$ :n *lehti*, mikäli on voimassa  $d_{\vec{T}}^-(b) = 0$ .

Olkoon  $a$  suunnatun puun  $\vec{T}$  juuri. Näemme helposti, että  $a$  on  $\vec{T}$ :n lehti jos ja vain jos  $a$  on  $\vec{T}$ :n ainoa piste. Lukija voi harjoitustehtävänä osoittaa, että jos  $\vec{T}$ :llä on  $a$ :n lisäksi muitakin pisteitä, niin sen piste  $b$  on lehti jos ja vain  $b \neq a$  ja  $b$  on  $T$ :n lehti. Näiden tulosten ja Lauseen III 1.5 nojalla saamme seuraavan tuloksen.

**III 3.4 Lause** *Jokaisella suunnatulla puulla on ainakin yksi lehti.*

Usein on tarpeellista arvioida suunnatun puun lehtien lukumäärää puun muiden ominaisuuksien avulla tai, kääntäen, arvioida muita puuhun liittyviä suureita lehtien lukumäärän avulla. Määrittelemme nyt eräitä suunnattuihin puihin liittyviä tunnuslukuja.

Panemme merkille, että jokaisella suunnatun puun  $\vec{T}_{(a)}$  pisteellä  $c$ , suhteikossa  $\vec{T}_{(a)}$  on yksinkertainen kulku  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_k)$  juuresta  $a$  pisteeseen  $c$  ja koska  $\bar{x}$  on kulku myös puussa  $T$ , niin Lauseen III 1.6 tuloksesta seuraa, että  $\bar{x}$  on ainoa kulku suhteikossa  $\vec{T}_{(a)}$ , jolla on vaadittu ominaisuus; tämä osoittaa, että voimme yksikäsitteisesti määritellä pisteen  $c$  korkeuden  $T_{(a)}$ :ssa.

**III 3.5 Määritelmä** Olkoon  $\vec{T}$  suunnattu puu ja olkoon  $a$  sen juuri.

A.  $\vec{T}$ :n piste  $c$  on *korkeudella*  $k$   $\vec{T}$ :ssa, mikäli suhteikossa  $\vec{T}$  on yksinkertainen kulku  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_k)$  juuresta  $a$  pisteeseen  $c$ .

B.  $\vec{T}$ :n  $n$ :s *taso* on joukko  $\{c \in P_T : c \text{ on korkeudella } n \vec{T}\text{:ssa}\}$ .

C.  $\vec{T}$ :n *korkeus* on suurin luvuista  $k$ , joilla  $\vec{T}$ :n  $k$ :s taso on epätyhjä.

D.  $\vec{T}$ :n *haavaisuus* on suurin luvuista  $d_{\vec{T}}^-(c)$ , missä  $c$  on  $T$ :n piste.

Esitämme nyt epäyhtälön, joka vallitsee suunnatun puun lehtien lukumäärän ja edellä määriteltyjen tunnuslukujen välillä.

**III 3.6 Lause** *Olkoon suunnatun puun  $\vec{T}$  pisteiden lukumäärä  $p$ , korkeus  $k$ , haaraisuus  $h$  ja lehtien lukumäärä  $l$ . Tällöin on voimassa*

$$lh \leq p(h-1) + 1 \leq h^{k+1}$$

**Todistus.** Olkoon  $a$   $\vec{T}$ :n juuri. Epäyhtälöt toteutuvat triviaalisti, jos  $\vec{T}$ :ssa ei ole muita pisteitä kuin  $a$ . Merkitsemme  $P_{\vec{T}} = P$  ja oletamme, että  $P \neq \{a\}$ .

Merkitsemme jokaisella  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_n$ :llä  $\vec{T}$ :n  $n$ :ttä tasoa. Osoitamme induktiolla  $n$ :n suhteen, että jokaisella  $n \in \mathbb{N}$  on voimassa  $|L_n| \leq h^n$ . Koska  $L_0 = \{a\}$ , niin epäyhtälö toteutuu  $n$ :n arvolla 0. Oletamme, että  $n > 0$  ja epäyhtälöt on jo todistettu arvolle  $n-1$ . Jokainen joukon  $L_n$  alkio on jonkun joukon  $L_{n-1}$  alkion seuraaja suhteikossa  $\vec{T}$ : jos  $s \in L_n$  ja jos  $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$  on yksinkertainen kulku  $a$ :sta  $s$ :ään, niin  $x_{n-1} \in L_{n-1}$  ja  $x_n = s$  on  $x_{n-1}$ :n seuraaja  $\vec{T}$ :ssa. Jokaisella  $t \in L_{n-1}$ , pisteen  $t$  seuraajien lukumäärä  $d_{\vec{T}}^-(t)$  on pienempi tai yhtäsuuri kuin luku  $h$ . Näinollen on voimassa  $|L_n| \leq |L_{n-1}| \cdot h$ ; koska induktio-oletuksen nojalla pätee, että  $|L_{n-1}| \leq h^{n-1}$ , niin saadaan vaadittu epäyhtälö  $|L_n| \leq h^n$ .

Koska  $k = \max\{n \in \mathbb{N} : L_n \neq \emptyset\}$ , niin on voimassa  $P = \bigcup_{n=0}^k L_n$  ja täten edelleen

$$p = |P| = \sum_{n=0}^k |L_n| \leq \sum_{n=0}^k h^n = \frac{1 - h^{k+1}}{1 - h}.$$

Tästä saadaan lauseen oikeanpuolinen epäyhtälö  $p(h-1) + 1 \leq h^{k+1}$ .

Suhteikon  $\vec{T}$  nuolien lukumäärä, eli puun  $T$  viivojen lukumäärä  $v_T$ , voidaan Lemman I 2.1 nojalla esittää muodossa  $v_T = \sum_{x \in P} d_{\vec{T}}^-(x)$ . Merkitään  $L$ :llä  $\vec{T}$ :n lehtien muodostamaa joukkoa. Koska jokaisella  $x \in L$  on voimassa  $d_{\vec{T}}^-(x) = 0$ , niin edellinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon  $v_T = \sum_{x \in P \setminus L} d_{\vec{T}}^-(x)$ . Koska jokaisella  $x \in P$  on voimassa  $d_{\vec{T}}^-(x) \leq h$ , niin viimeisestä yhtälöstä seuraa epäyhtälö  $v_T \leq |P \setminus L| \cdot h$ . Pannaan merkille, että  $|L| = l$  ja  $|P \setminus L| = |P| - |L| = p - l$ ; tästä seuraa, että  $v_T \leq (p - l)h$ . Lauseen III 1.3 nojalla on voimassa  $v_T = p_T - 1$  eli  $v_T = p - 1$ . Edelläesitetystä seuraa epäyhtälö  $p - 1 \leq (p - l)h$  eli lauseen vasemmanpuolinen epäyhtälö.  $\square$

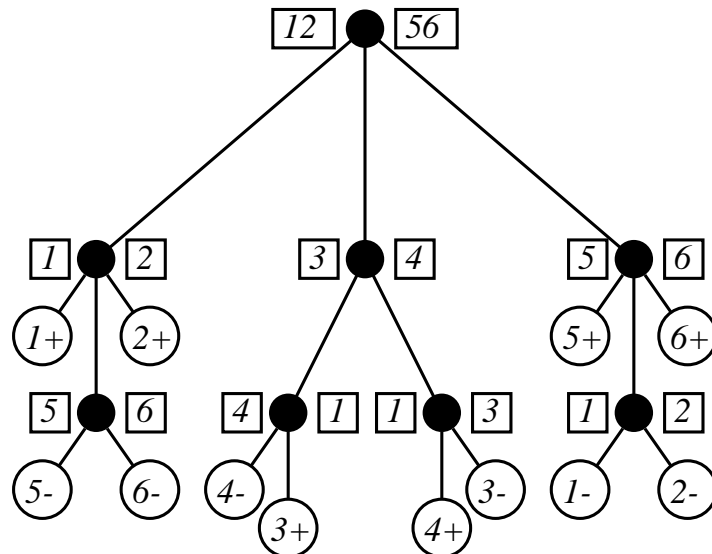
**III 3.7 Korollaari** Olkoon suunnatun puun  $\vec{T}$  korkeus  $k$ , haaraisuus  $h$  ja lehtien lukumäärä  $l$ . Tällöin on voimassa

$$l \leq h^k$$

Edellisiä epäyhtälöitä voidaan käyttää hyväksi mm. etsintäpuiden yhteydessä:

**III 3.8 Esimerkki** Niin kutsutussa *väärän kolikon ongelmassa* pitää etsiä annettusta kolikkojoukosta mahdollinen väärä raha kun tiedetään, että väärä kolikko on eripainoinen kuin oikeat, keskenään samanpainoiset, kolikot. Apuvälineenä on tasavarsivaaka, joka näyttää joko punnittavien samanpainoisuuden tai eripainoisten punnittavien painojärjestyksen.

Ongelmasta on monta versiota, mutta tässä tarkastelemme vain yhtä yksinkertaista tapausta: tiedämme, että kuuden kolikon joukossa on yksi väärä raha ja tehtävänä on selvittää, mikä on väärä kolikko ja onko se painavampi vai kevyempi kuin muut. Tehtävä voidaan ratkaista kolmella punnituksella: seuraavassa kuvattu puu osoittaa, miten voidaan menetellä. Tutkittavat kolikot on numeroitu 1, 2, 3, 4, 5, 6. Puun mustalla merkityt pisteet vastaavat punnituksia ja niiden viereen on merkitty vaakakuppien sisältö; punnituksen jälkeen haaraudutaan alaoikealle, jos oikeanpuoleisen vaakakupin sisältö osoittautuu painavammaksi kuin vasemmanpuoleisen; alavasemmalle, jos vasemmanpuoleisen kupin sisältö osoittautuu painavammaksi kuin oikeanpuoleisen; suoraan alaspäin, jos kuppien sisällöt osoittautuvat samanpainoisiksi. Puun lehdet vastaavat "etsinnän" lopputulosta: niihin on merkitty vääräksi osoittautuneen kolikon numero ja sen perään merkki "+", jos väärä kolikko oli oikeita painavampi ja merkki "-", jos väärä kolikko oli oikeita kevyempi.

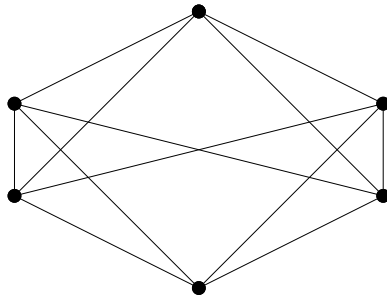


Korollarin III 3.7 tuloksesta seuraa, että kaksi punnitusta ei aina riitä väärän kolikon löytämiseen kuuden kolikon joukosta ja sen painon poikkeamissuunnan määrittämiseen. Mahdollisia lopputuloksia on kaksitoista ja kuhunkin etsintämenetelmään liittyvän suunnatun puun haaraisuus on korkeintaan kolme; jos jossakin menetelmässä selvittäisiin kahdella punnituksella, niin vastaavan suunnatun puun korkeus olisi kaksi, joten sen lehtien lukumäärä olisi korkeintaan yhdeksän.

### HARJOITUSTEHTÄVIÄ LUKUUN III

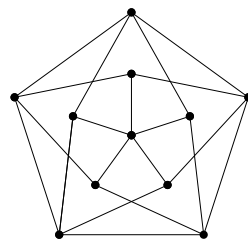
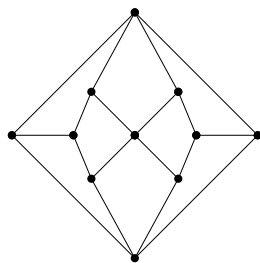
1. Esitä kaikki (isomorfaa vaille) erilaiset  $n$ -pisteiset puut kun  $n = 7$  ja kun  $n = 8$ .
2. Osoita, että jokainen puu on kaksijakoinen verkko.
3. Olkoon  $k$  luonnollinen luku ja olkoon  $T$  sellainen puu, että jokaisen  $T$ :n pisteen aste on joko 1 tai  $k$ . Merkitään  $p$ :llä  $T$ :n pisteiden lukumäärää ja  $l$ :llä  $T$ :n lehtien lukumäärää.
  - (a) Osoita, että jos  $k = 3$ , niin luku  $p$  on parillinen ja on voimassa  $l = \frac{p}{2} + 1$ .
  - (b) Osoita, että jos  $k \geq 3$ , niin  $l > \frac{p}{2}$ .
4. Olkoon  $T$  puu, jonka pisteet ovat korkeintaan 4 asteisia. Laske 3-asteisten pisteiden lukumäärä, kun tiedetään, että 1-asteisia pisteitä on 6, 2-asteisia 1 ja 4-asteisia 1.
5. (a) Näytä, että 10-pisteisessä paritonasteisessa puussa on ainakin kuusi lehteä.  
 (b) Anna esimerkki 10-pisteisestä paritonasteisesta puusta, jonka lehtien lukumäärä on kuusi.
6. Olkoon  $G$  täydellinen neljän pisteen verkko ja olkoon  $W \subset V_G$  3-joukko. Osoita, että joko  $W$  on  $G$ :n rengas tai  $W$  on  $G$ :n virittävän puun viivojen joukko.
7. Korollarin III 2.11 tuloksesta seuraa, että yhtenäisen verkon  $G$  renkaiden lukumäärä on yksi jos ja vain jos  $G$ :llä on yhtä monta pistettä kuin viivaa; luonnehdi tällaisia verkkoja  $G$  renkaiden ja puiden avulla.
8. Luonnehdi renkaiden avulla niitä kahdesti yhtenäisiä verkkoja  $G$ , joilla
  - (a)  $v_G = p_G$ .
  - (b)  $v_G = p_G + 1$ .
9. Olkoon  $G$  yhtenäinen verkko. Verkon  $G$  leikkausjoukko on sellainen osajoukko  $Q \subseteq V_G$ , jolla verkko  $G - Q$  on epäyhtenäinen. Olkoon  $T$   $G$ :n virittävä puu. Osoita, että jokainen  $G$ :n leikkausjoukko sisältää ainakin yhden  $T$ :n viivan.
10. Olkoon  $T$  puu, jossa on ainakin kaksi pistettä, joiden aste on suurempi kuin kaksi. Mikä on  $T$ :n lehtien pienin mahdollinen lukumäärä?

11. Olkoot  $T$  ja  $T'$  puita, joilla ei ole yhteisiä viivoja. Näytä, että verkko  $T \vee T'$  on puu jos ja vain jos puilla  $T$  ja  $T'$  on täsmälleen yksi yhteinen piste.
12. Olkoon  $T$   $n$ -pisteinen puu. Mikä on  $T$ :n lehtien pienin ja suurin mahdollinen lukumäärä?
13. Näytä, että jos puussa  $T$  on  $k$ -asteinen piste, niin  $T$ :ssä on ainakin  $k$  lehteä.
14. Näytä, että jokaiselle verkolle  $G$  pätee, että  $v_G \geq p_G - k$ , missä  $k$  on  $G$ :n komponenttien lukumäärä, ja että yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos  $G$  on renkaaton. [Ohje jälkimmäiseen kohtaan: Tarkastele  $G$ :n komponentteja.]
15. Määritä alla kuvatun verkon virittävien puiden lukumäärä.



16. Etsi verkon  $G$ :  
 $a : b c d \quad b : a d \quad c : a d \quad d : a b c$   
virittävät puut.

17. Alla vasemmalla on kuvattu *Herschelin verkko* ja oikealla *Grötzschin verkko*. Selvitä kummankin verkon tapauksessa, onko verkolla kahta virittävää puuta, joilla ei ole yhteisiä viivoja.



18. Luvun II harjoitustehtävän 13 tuloksesta seuraa Korollarin III 2.11 nojalla, että tasoverkon  $G$  renkaistoryhmän alkioiden lukumäärä on  $2^{a-1}$ , missä  $a$  on  $G$ :n määräämien tasoalueiden lukumäärä. Johda tästä Korollarin III 2.11 avulla seuraava tulos: Olkoon  $G$  yhtenäinen tasoverkko, jolla on  $p$  pistettä,  $v$  viivaa ja  $a$  aluetta. Tällöin on voimassa

$$p - v + a = 2 \quad (\text{Eulerin kaava})$$

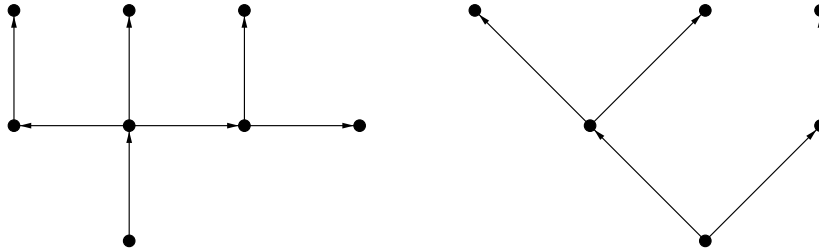
19. Johda Eulerin kaavan avulla yhtälö avaruuden monitahokkaan kärkien, särmien ja tahkojen lukumäärien välille.
20. Laske Petersenin verkon renkaiden lukumäärä.  
[Ohje: Korollaari III 2.11 ja Luvun II harjoitustehtävät 8 ja 9.]
21. Olkoon  $S$  yksisuuntainen suhteikko, jolla on juuri  $a$ . Osoita, että  $S$  on suunnattu puu jos ja vain jos  $d_S^+(a) = 0$  ja  $d_S^+(b) = 1$  jokaisella  $b \in P_S \setminus \{a\}$ .
22. Näytä edellisen tehtävän tuloksen avulla, että jos suunnatulla puulla  $\vec{T}$ :llä on juuren  $a$  lisäksi muitakin pisteitä, niin piste  $b$  on  $\vec{T}$ :n lehti jos ja vain  $b \neq a$  ja  $b$  on puun  $T$  lehti.
23. Olkoon suunnatun puun  $\vec{T}$  haaraisuus  $h$  ja lehtien lukumäärä  $\ell$  ja olkoon  $r$   $\vec{T}$ :n haarautumispisteiden lukumäärä (eli niiden pisteiden lukumäärä, jotka eivät ole lehtiä). Osoita, että on voimassa  $r \geq \frac{\ell-1}{h-1}$ .
24. Olkoon  $\vec{T}$  suunnattu puu, jonka jokaisella haarautumispisteellä on  $d$  seuraajaa. Näytä, että  $\vec{T}$ :n haarautumispisteiden lukumäärä  $r$  ja lehtien lukumäärä  $\ell$  toteuttavat ehdon

$$(d-1)r = \ell - 1.$$

25. Olkoon  $n$  luonnollinen luku. Osoita, että on olemassa  $n$ -pisteinen suunnattu puu, jonka jokaisella haarautumispisteellä on täsmälleen kaksi seuraajaa, jos ja vain jos  $n$  on pariton.
26. Yksi kahdestatoista kolikosta on väärä ja eroaa muista painoltaan (kevyempi tai painavampi). Montako punnitusta tasavarsivaa'alla tarvitaan väärän kolikon löytämiseksi ja sen laadun selvittämiseksi?
27. Olkoon  $n \in \{1, 2, \dots, 40\}$ . Tehtävänä on määrittää  $n$  kysymyksillä, jotka ovat tyyppiä ”onko  $n \leq a$ ?” jollakin  $a \in \mathbb{N}$ . Montako kysymystä tarvitaan?

Suunnatun puun  $\vec{T}$  Matula-luku  $M(\vec{T})$  määritellään rekursiivisesti puun korkeuden  $k(\vec{T})$  suhteen seuraavalla tavalla. Olkoon  $a$   $\vec{T}$ :n juuri. Jos  $k(\vec{T}) = 0$  eli jos  $\vec{T}$ :llä ei ole  $a$ :n lisäksi mitään muita pisteitä, niin asetetaan  $M(\vec{T}) = 1$ . Oletetaan, että  $k(\vec{T}) > 0$  ja että  $M(S)$  on jo määritelty kaikille niille suunnatuille puille  $\vec{Y}$ , joilla  $k(\vec{Y}) < k(\vec{T})$ . Merkitään  $N_a$ :lla pisteen  $a$  seuraajien muodostamaa joukkoa ja pannaan merkille, että joukon  $P_{\vec{T}} \setminus \{a\}$  virittämä aliverkko on esitettävissä muodossa  $\bigvee_{b \in N_a} S_b$ , missä  $S_b$  on kyseisen aliverkon pisteen  $b$  yhtenäinen komponentti. Jokaisella  $b \in N_a$ , suhteikon  $\vec{T}$  alisuhteikko  $S_b$  on suunnattu puu, jolle on voimassa  $k(S_b) < k(\vec{T})$ ; täten luku  $M(S_b)$  on määritelty. Nyt määritellään luku  $M(\vec{T})$  tulona, jonka tekijöinä ovat luvut  $p(M(S_b))$ ,  $b \in N_a$ ; tässä merkintä  $p(i)$  tarkoittaa  $i$ :nnettä alkulukua, siis  $i$ :nnettä lukua jonossa 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

28. Laske seuraavien suunnattujen puiden Matula-luvut.



29. Konstruoi sellaiset suunnatut puut  $\vec{T}$  ja  $\vec{Y}$ , että  $M(\vec{T}) = 7$  ja  $M(\vec{Y}) = 12$ .

# Liitteet

## 1. JOUKKOJEN SYMMETRINEN EROTUS.

Seuraavassa määrittelemme laskutoimituksen käsitteen ja tarkastelemme eräitä laskutoimituksella varustettuja joukkoja, nk. “ryhmiä”. Lopuksi määrittelemme annetun joukon potenssijoukossa laskutoimituksen, joukkojen “symmetrisen erotuksen”, jolla varustettuna potenssijoukosta tulee ryhmä.

**A 1.1 Määritelmä** Olkoon  $A$  joukko. *Binäärioperaatio* eli (*kaksipaikkainen*) *laskutoimitus* joukossa  $A$  on kuvaus  $A \times A \rightarrow A$ .

Seuraavassa tarkoitamme termillä “laskutoimitus” aina kaksipaikkaista laskutoimitusta. Toisinaan puhumme “joukon  $A$  laskutoimituksista” kun tarkoitamme laskutoimituksia joukossa  $A$ .

Kun  $\otimes$  on laskutoimitus joukossa  $A$ , käytämme joukon  $A \times A$  alkion  $(a, b)$  kuvaalkiolle  $\otimes((a, b))$  yleensä lyhennettyä merkintää  $a \otimes b$ .

Joukon  $A$  laskutoimituksen  $\otimes$  rajoittuma joukkoon  $B \subset A$  on kuvaus  $\otimes|_{B \times B}$ ; tämä kuvaus on joukon  $B$  laskutoimitus jos ja vain jos  $\otimes(B \times B) \subset B$ , toisin sanoen, jos ja vain jos kaikilla  $b, b' \in B$  on voimassa  $b \otimes b' \in B$ .

**A 1.2 Esimerkkejä** (a) Merkitsemme  $\text{Rel}_A$ :lla kaikkien joukon  $A$  relaatioiden muodostamaa joukkoa, ts.,  $\text{Rel}_A = \mathcal{P}(A \times A)$ . Relaatioiden yhdisteleminen  $\circ : (R, Q) \mapsto R \circ Q$  on laskutoimitus joukossa  $\text{Rel}_A$ . Koska kahden kuvauksen  $A \rightarrow A$  yhdistelmä on kuvaus  $A \rightarrow A$ , näemme, että laskutoimituksen  $\circ$  rajoittuma kaikkien kuvausten  $A \rightarrow A$  muodostamaan joukkoon on kyseisen joukon laskutoimitus. Myös laskutoimituksen  $\circ$  rajoittuma kaikkien injektioiden (tai kaikkien surjektioiden tai kaikkien bijektioiden) muodostamaan joukkoon on kyseisen joukon laskutoimitus.

(b) Kuvaukset  $(B, C) \mapsto B \cup C$ ,  $(B, C) \mapsto B \cap C$  ja  $(B, C) \mapsto B \setminus C$  ovat joukon  $\mathcal{P}(A)$  laskutoimituksia jokaisella joukolla  $A$ . □



Tarkastelemme nyt eräitä laskutoimitusten ominaisuuksia.

**A 1.3 Määritelmä** Olkoon  $\otimes$  joukon  $A$  laskutoimitus.

Laskutoimitus  $\otimes$  on *assosiatiivinen* eli *liitännäinen*, mikäli kaikilla  $a, b, c \in A$  on voimassa  $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ .

Laskutoimitus  $\otimes$  on *kommutatiivinen* eli *vaihdannainen*, mikäli kaikilla  $a, b \in A$  on voimassa  $a \otimes b = b \otimes a$ .

Määritelmistä seuraa suoraan, että laskutoimitus on assosiatiivinen (kommutatiivinen), mikäli se on jonkun assosiatiivisen (kommutatiivisen) laskutoimituksen rajoittuma.

**A 1.4 Esimerkkejä** (a) Relaatioiden yhdisteleminen  $\circ$  on assosiatiivinen laskutoimitus joukossa  $\text{Rel}_A$ . Tämä laskutoimitus ei yleensä ole kommutatiivinen: esimerkiksi kuvauksille  $f, g : [3] \rightarrow [3]$ , missä  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 3$ ,  $f(3) = 2$  ja  $g(1) = 2$ ,  $g(2) = 1$ ,  $g(3) = 3$ , on voimassa  $f \circ g \neq g \circ f$ .

(b) Joukon  $\mathcal{P}(A)$  laskutoimitukset  $\cup$  ja  $\cap$  ovat assosiatiivisia ja kommutatiivisia; sen sijaan laskutoimituksella  $\setminus$  ei ole kumpaakaan ominaisuutta, mikäli  $A \neq \emptyset$ .  $\square$

*Laskutoimituksella varustettu joukko* on pari  $(A, \otimes)$ , missä  $A$  on joukko ja  $\otimes$  on laskutoimitus joukossa  $A$ .

**A 1.5 Määritelmä** (a) Olkoon  $(A, \otimes)$  laskutoimituksella varustettu joukko. Joukon  $A$  alkio  $e$  on  $(A, \otimes)$ :n *neutraalialkio*, mikäli jokaisella  $a \in A$  on voimassa  $a \otimes e = e \otimes a = a$ .

(b) Olkoon  $(A, \otimes)$  laskutoimituksella varustettu joukko, jolla on neutraalialkio  $e$ . Joukon  $A$  alkio  $b$  on  $A$ :n alkion  $a$  *käänteisalkio*, mikäli on voimassa  $a \otimes b = b \otimes a = e$ .

Jos laskutoimituksella varustetulla joukolla  $(A, \otimes)$  on neutraalialkio, niin se on yksikäsitteinen: jos  $e$  ja  $e'$  ovat neutraalialkioita, niin  $e = e \otimes e' = e'$ . Mikäli laskutoimitus  $\otimes$  on assosiatiivinen, niin myös käänteisalkiot ovat yksikäsitteisiä: jos  $A$ :n alkio  $b$  ja  $b'$  ovat alkion  $a$  käänteisalkioita, niin  $b = b \otimes e = b \otimes (a \otimes b') = (b \otimes a) \otimes b' = e \otimes b' = b'$ .

**A 1.6 Esimerkkejä** (a) Joukon  $A$  identtisyysrelaatio  $\Delta_A$  on laskutoimituksella varustetun joukon  $(\text{Rel}_A, \circ)$  neutraalialkio. Jos  $f$  on bijektio  $A \rightarrow A$ , niin tällöin  $f$ :n käänteiskuvaus  $f^{-1}$  on  $f$ :n käänteisalkio  $(\text{Rel}_A, \circ)$ :ssa.

(b) Tyhjä joukko on  $(A, \cup)$ :n neutraalialkio ja  $A$  on  $(A, \cap)$ :n neutraalialkio.  $\square$

Algebrassa tarkastellaan yhdellä tai useammalla laskutoimituksella varustettuja joukkoja; määrittelemme nyt tällaisista “algebrallisista struktuureista” kaikkein perustavanlaatuisimman.

**A 1.7 Määritelmä** *Ryhmä* on assosiatiivisella laskutoimituksella varustettu joukko, jolla on neutraalialkio ja jonka jokaisella alkiolla on käänteisalkio.

*Kommutatiivinen ryhmä* eli *Abelin ryhmä* on ryhmä, jonka laskutoimitus on kommutatiivinen.

Eräitä kaikkein tärkeimmistä diskreetissä matematiikassa esiintyvistä ryhmistä ovat ns. *symmetriset ryhmät*:

**A 1.8 Lause** *Olkoon  $X$  joukko. Merkitään  $S_X$ :llä kaikkien bijektioiden  $X \rightarrow X$  muodostamaa joukkoa. Tällöin pari  $(S_X, \circ)$  on ryhmä. Ryhmän neutraalialkio on  $X$ :n identtinen kuvaus ja jokaisella  $\varphi \in S_X$ , alkion  $\varphi$  käänteisalkio on  $\varphi$ :n käänteiskuvaus  $\varphi^{-1}$ .*

**Todistus.** Harjoitustehtävä. □

Joukon  $X$  symmetristä ryhmää  $(S_X, \circ)$  merkitään yleensä vain lyhyesti  $S_X$ :llä. Jos  $X = [n]$ , niin ryhmästä käytetään merkintää  $S_n$ .

Esimerkki A 1.4(a) osoittaa, että symmetriset ryhmät ovat (nimestään huolimatta) yleensä epäkommutatiivisia.

Aikaisemmissa esimerkeissä kohtasimme eräitä potenssijoukon laskutoimituksia; tarkastelemme vielä erästä tällaista laskutoimitusta.

Olkoot  $D$  ja  $E$  joukkoja. Joukkojen  $D$  ja  $E$  *symmetrinen erotus* on joukko  $(D \setminus E) \cup (E \setminus D)$ ; tästä joukosta käytetään merkintää  $D\Delta E$ . Joukko  $D\Delta E$  koostuu niistä alkiosta, jotka kuuluvat joko joukkoon  $D$  tai joukkoon  $E$ , mutta eivät molempiin; täten on voimassa  $D\Delta E = (D \cup E) \setminus (D \cap E)$ .

**A 1.9 Lemma** *Olkoot  $C$ ,  $D$  ja  $E$  joukon  $A$  osajoukkoja. Tällöin on voimassa:*

- (a).  $C\Delta\emptyset = C$  ja  $C\Delta C = \emptyset$
- (b).  $C\Delta A = A \setminus C$  ja  $C\Delta(A \setminus C) = A$ .
- (c).  $C\Delta D = D\Delta C$ .
- (d).  $(C\Delta D) \cap E = (C \cap E)\Delta(D \cap E)$ .



Edellisten tulosten avulla voimme nyt helposti todistaa seuraavan tuloksen, joka osoittaa, että joukko-operaatio  $\Delta$  on assosiatiivinen.

**A 1.12 Lause** *Olkoot  $C, D$  ja  $E$  joukkoja. Tällöin on voimassa*

$$(C\Delta D)\Delta E = C\Delta(D\Delta E).$$

**Todistus.** Jokaiselle alkion  $x$  on Lemmojen A 1.10 ja A 1.11 nojalla voimassa

$$\begin{aligned} x \in (C\Delta D)\Delta E &\iff (x \in C\Delta D) \sqcup (x \in E) \\ &\iff [(x \in C) \sqcup (x \in D)] \sqcup (x \in E) \\ &\iff (x \in C) \sqcup [(x \in D) \sqcup (x \in E)] \\ &\iff x \in C\Delta(D\Delta E). \quad \square \end{aligned}$$

Lemman A 1.9 kohdan (a) nojalla saamme Lauseelle A 1.12 seuraavan korollaarin.

**A 1.13 Korollaari** *Olkoon  $A$  joukko. Tällöin pari  $(\mathcal{P}(A), \Delta)$  on ryhmä. Ryhmän neutraali-alkio on  $\emptyset$  ja jokaisella  $C \in \mathcal{P}(A)$ , alkion  $C$  käänteisalkio on  $C$ .*

Operaation  $\Delta$  assosiatiivisuuden nojalla voidaan muotoa  $(C\Delta D)\Delta E$  ja  $C\Delta(D\Delta E)$  olevat lausekkeet kirjoittaa muotoon  $C\Delta D\Delta E$ . Yleisemmin, jos  $B_1, \dots, B_n$  ovat joukkoja ja  $n \geq 2$ , niin määritellään joukko  $B_1\Delta \dots \Delta B_n$  rekursiivisesti asettamalla  $B_1\Delta \dots \Delta B_2 = B_1\Delta B_2$  ja jokaisella  $1 < k < n$ ,  $B_1\Delta \dots \Delta B_{k+1} = (B_1\Delta \dots \Delta B_k)\Delta B_{k+1}$ .

Seuraava tulos antaa yksinkertaisen luonnehdinnan edellä määritellyille joukoille.

**A 1.14 Lemma** *Olkoot  $B_1, \dots, B_n$  joukkoja ja  $n > 1$ . Tällöin  $x \in B_1\Delta \dots \Delta B_n$  jos ja vain jos joukossa  $\{i \in [n] : x \in B_i\}$  on pariton määrä alkioita.*

**Todistus.** Suoritamme todistuksen induktiolla luvun  $n$  suhteen.

$$\begin{aligned} n = 2 : x \in B_1\Delta B_2 &\iff |\{i \in [2] : x \in B_i\}| = 1 \\ &\iff \text{luku } |\{i \in [2] : x \in B_i\}| \text{ on pariton.} \end{aligned}$$

$n > 2$ : Oletamme, että väite pätee  $n$ :ää pienemmille luvuille. Nyt on voimassa

$$\begin{aligned} x \in B_1\Delta \dots \Delta B_n &\iff x \in (B_1\Delta \dots \Delta B_{n-1})\Delta B_n \iff \\ &\text{joko } |\{i \in [n-1] : x \in B_i\}| \text{ pariton ja } x \notin B_n \\ &\text{tai } |\{i \in [n-1] : x \in B_i\}| \text{ parillinen ja } x \in B_n \\ &\iff |\{i \in [n] : x \in B_i\}| \text{ pariton.} \quad \square \end{aligned}$$

Annamme lopuksi kaavan kahden äärellisen joukon symmetrisen erotuksen alkoiden lukumäärälle.

---

**A 1.15 Lemma** *Olkoot  $C$  ja  $D$  äärellisiä joukkoja. Tällöin*

$$|C\Delta D| = |C| + |D| - 2 \cdot |C \cap D| .$$

**Todistus.** On voimassa  $C\Delta D = (C \setminus D) \cup (D \setminus C)$ . Joukot  $C \setminus D$  ja  $D \setminus C$  ovat erillisiä, joten on voimassa  $|(C \setminus D) \cup (D \setminus C)| = |C \setminus D| + |D \setminus C|$ . Edelleen on voimassa  $C \setminus D = C \setminus (C \cap D)$  ja tästä seuraa, että  $|C \setminus D| = |C| - |C \cap D|$ . Vastaavasti on voimassa yhtälö  $|D \setminus C| = |D| - |C \cap D|$ . Edellä esitetyn nojalla pätee, että

$$\begin{aligned} |C\Delta D| &= |C \setminus D| + |D \setminus C| \\ &= |C| - |C \cap D| + |D| - |D \cap C| . & \square \\ &= |C| + |D| - 2 \cdot |C \cap D| \end{aligned}$$

**A 1.16 Korollaari** *Olkoot  $C$  ja  $D$  äärellisiä joukkoja, joissa kummassakin on parillinen määrä alkioita. Tällöin joukossa  $C\Delta D$  on parillinen määrä alkioita.*

## 2. ERÄITÄ KOMBINATORISIA PERUSTULOKSIA.

Palautamme aluksi mieliin seuraavan tuloksen, jonka matemaattinen sisältö on hyvin vaatimaton, mutta joka kuitenkin sisältää niin käyttökelpoisen “kombinatorisen periaatteen”, että sille on jopa annettu oma nimi.

**A 2.1 Lause** (Laatikkoperiaate) *Olkoot  $X$  ja  $Y$  äärellisiä joukkoja,  $|X| > |Y|$  ja  $f$  kuvaus  $X \rightarrow Y$ . Tällöin on olemassa sellaiset  $x, z \in X$ , että  $x \neq z$  ja  $f(x) = f(z)$ .*

**Todistus.** Muussa tapauksessa  $f$  olisi injektio ja olisi voimassa  $|X| \leq |Y|$ .  $\square$

**Tulkinta:**  $X$ :n alkiot ovat “palloja”,  $Y$ :n alkiot “laatikoita” ja  $f$  on “pallojen pano laatikoihin”.

**A 2.2 Esimerkkejä Väite.** Jokaisessa kahden tai useamman ihmisen muodostamassa joukossa  $X$  on kaksi henkilöä, joilla on sama määrä tuttavuuksia joukossa  $X$  (oletamme “tuttavuuden” olevan aina molemminpuolista).

**Todistus.** Merkitään  $|X| = n$ . Määritellään kuvaus  $f : X \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$  asettamalla  $f(x) = |\{y \in X : y \text{ } x\text{:n tuttava}\}|$  jokaisella  $x \in X$ . Nyt on voimassa joko  $0 \notin f(X)$  tai  $n-1 \notin f(X)$  (“jos joku on kaikkien tuttava, niin jokaisella on joku tuttava”). Täten  $|f(X)| \leq n-1 < |X|$ . Laatikkoperiaatteen nojalla on joillakin  $x \neq y$  voimassa  $f(x) = f(y)$ .

Äärellisen monen äärellisen joukon yhdistysjoukko on äärellinen ja yhdistysjoukon koko on yhdistyneen tekijöiden summa siinä tapauksessa, että joukot ovat keskenään erillisiä. Johdamme nyt yhdistysjoukon koolle lausekkeen, joka pätee myös silloin kun joukot leikkaavat toisiaan. Kahden joukon tapauksessa saamme seuraavan tuloksen.

**A 2.3 Lemma** *Olkoot  $A$  ja  $B$  äärellisiä joukkoja. Tällöin  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .*

**Todistus.** On voimassa  $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$  ja tästä seuraa, koska joukot  $A$  ja  $B \setminus A$  ovat äärellisiä ja  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ , että  $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$ . Koska

$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$  ja  $A \cap B \subset B$ , niin on voimassa  $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$ . Näinollen on voimassa

$$|A \cup B| = |A| + |B \setminus A| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad \square$$

Yleistämme nyt edellisen lauseen tuloksen koskemaan äärellisen monen äärellisen joukon yhdistystä. Todistamme ensin seuraavan aputuloksen.

**A 2.4 Lemma** *Kun  $A$  äärellinen joukko,  $A \neq \emptyset$ , niin merkitään  $\mathcal{E}(A) = \{B \subset A : \text{luku } |B| \text{ on parillinen}\}$  ja  $\mathcal{O}(A) = \{B \subset A : \text{luku } |B| \text{ on pariton}\}$ . Tällöin joukot  $\mathcal{E}(A)$  ja  $\mathcal{O}(A)$  ovat äärellisiä ja  $|\mathcal{E}(A)| = |\mathcal{O}(A)|$ .*

**Todistus.** Käytämme induktiota joukon alkioden lukumäärän suhteen. Olkoon  $a_0$  joukon  $A$  alkio.

$|A| = 1$ : Jos  $A = \{a_0\}$ , niin  $\mathcal{E}(A) = \{\emptyset\}$  ja  $\mathcal{O}(A) = \{A\}$ , joten väite pitää paikkansa. Oletamme, että on voimassa  $|A| > 1$  ja että olemme jo todistaneet väitteen joukoille, joissa on  $|A| - 1$  alkioita. Merkitsemme  $\bar{A} = A \setminus \{a_0\}$ . Tällöin  $|\bar{A}| = |A| - 1$ , joten väite pätee  $\bar{A}$ :lle ja joukot  $\mathcal{E}(\bar{A})$  ja  $\mathcal{O}(\bar{A})$  ovat äärellisiä. Määrittelemme kuvaukset  $\psi_e : \mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A}) \rightarrow \mathcal{E}(A)$  ja  $\psi_o : \mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A}) \rightarrow \mathcal{O}(A)$  seuraavasti.

$$\psi_e(B) = \begin{cases} B & \text{jos } |B| \in \mathcal{E}(\bar{A}) \\ B \cup \{a_0\} & \text{jos } |B| \in \mathcal{O}(\bar{A}) \end{cases} \quad \psi_o(B) = \begin{cases} B & \text{jos } |B| \in \mathcal{O}(\bar{A}) \\ B \cup \{a_0\} & \text{jos } |B| \in \mathcal{E}(\bar{A}) \end{cases}$$

Voimme helposti tarkistaa,  $\psi_e$  on bijektio  $\mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A}) \rightarrow \mathcal{E}(A)$  ja  $\psi_o$  on bijektio  $\mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A}) \rightarrow \mathcal{O}(A)$ . Näin ollen on voimassa

$$|\mathcal{E}(A)| = |\mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A})| = |\mathcal{O}(A)|. \quad \square$$

Voimme panna merkille, että osa lemmän tuloksesta on hyvin helppo todistaa siinä tapauksessa, että joukon  $A$  alkioden lukumäärä on pariton: tällöin nimittäin kuvaus  $\varphi : \mathcal{E}(A) \rightarrow \mathcal{O}(A)$ , missä  $\varphi(B) = A \setminus B$ , on bijektio.

Voimme ilmaista lemmän tuloksen myös seuraavilla yhtälöillä:

$$\sum_{B \in \mathcal{E}(A)} 1 = \sum_{B \in \mathcal{O}(A)} 1 \quad \text{eli} \quad \sum_{B \in \mathcal{E}(A)} 1 - \sum_{B \in \mathcal{O}(A)} 1 = 0 \quad \text{eli} \quad \sum_{B \subset A} (-1)^{|B|} = 0.$$

Panemme vielä merkille, että oikeanpuoleinen yhtälö voidaan saattaa seuraavaan muotoon:

$$\sum_{\emptyset \neq B \subset A} (-1)^{|B|+1} = 1. \quad (*)$$

Todistamme nyt viimeksi kirjoitetun yhtälön avulla tärkeän kaavan äärellisen monen äärellisen joukon yhdistysjoukon alkioden lukumäärälle.

**A 2.5 Lause** (*Summa- ja erotusperiaate*) Olkoon  $I$  äärellinen joukko ja olkoon  $A_i$  äärellinen joukko jokaisella  $i \in I$ . Tällöin joukko  $\bigcup_{i \in I} A_i$  on äärellinen ja

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \subset I} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

**Todistus.** Merkitsemme  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Haluamme laskea joukon  $A$  koon. Jokaisella  $x \in A$  merkitsemme  $I_x = \{i \in I : x \in A_i\}$  ja panemme merkille, että  $I_x \neq \emptyset$ .

Yhtälön (\*) nojalla on voimassa

$$|A| = \sum_{x \in A} 1 = \sum_{x \in A} \sum_{\emptyset \neq K \subset I_x} (-1)^{|K|+1}.$$

Ryhmittelemme viimeisessä summassa termit uudelleen kokoamalla jokaisella  $\emptyset \neq J \subset I$  yhteen ne termit, jotka vastaavat joukkoa  $J$ ; panemme merkille, että jokaisella  $x \in A$  on voimassa  $J \subset I_x$  täsmälleen silloin kun on voimassa  $x \in \bigcap_{i \in J} A_i$ . Jokaisella  $\emptyset \neq J \subset I$  merkitsemme  $A_J = \bigcap_{i \in J} A_i$ . Tällöin on voimassa

$$\sum_{x \in A} \sum_{\emptyset \neq K \subset I_x} (-1)^{|K|+1} = \sum_{\emptyset \neq J \subset I} \sum_{x \in A_J} (-1)^{|J|+1}.$$

Saamme nyt halutun lausekkeen joukon  $A$  koolle, sillä on voimassa

$$\sum_{\emptyset \neq J \subset I} \sum_{x \in A_J} (-1)^{|J|+1} = \sum_{\emptyset \neq J \subset I} (-1)^{|J|+1} \sum_{x \in A_J} 1 = \sum_{\emptyset \neq J \subset I} (-1)^{|J|+1} |A_J|. \quad \square$$

**A 2.6 Korollaari (a)**  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .

**(b)**  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ .

Laskemme vielä summa- ja erotusperiaatteen avulla kahden äärellisen joukon välisten surjektioiden lukumäärän. Merkitsemme

$$K(X, Y) = \{f : f \text{ on kuvaus } X \rightarrow Y\} \text{ ja}$$

$$S(X, Y) = \{f : f \text{ on surjektio } X \rightarrow Y\}.$$

**A 2.7 Lause** Olkoon  $X$   $n$ -joukko ja  $Y$   $k$ -joukko. Tällöin

$$|S(X, Y)| = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$



**Todistus.** Todistetaan lause summa- ja erotusperiaatteen avulla. Merkitään jokaisella  $y \in Y$ ,  $F_y = \{f \in K(X, Y) : y \notin f(X)\}$ . Tällöin  $S(X, Y) = K(X, Y) \setminus \bigcup_{y \in Y} F_y$ . Jokaisella  $A \subset Y$  on voimassa  $\bigcap_{y \in A} F_y = \{f \in K(X, Y) : f(X) \cap A = \emptyset\}$ ; tästä seuraa, että  $\bigcap_{y \in A} F_y = K(X, Y \setminus A)$  ja edelleen, että  $\left| \bigcap_{y \in A} F_y \right| = (k - |A|)^n$ . Edellä esitetystä seuraa summa- ja erotusperiaatteen nojalla, että on voimassa

$$\left| \bigcup_{y \in Y} F_y \right| = \sum_{\emptyset \neq A \subset Y} (-1)^{|A|+1} \left| \bigcap_{y \in A} F_y \right| = \sum_{\emptyset \neq A \subset Y} (-1)^{|A|+1} (k - |A|)^n.$$

Ryhmittelemällä termejä uudelleen, saadaan viimeinen summalauseke esitettyä muodossa  $\sum_{i=1}^k \sum_{A \in \mathcal{P}_i(Y)} (-1)^{i+1} (k-i)^n$ . Koska jokaisella  $i \in [k]$  on voimassa  $|\mathcal{P}_i(Y)| = \binom{k}{i}$ , niin saadaan yhtälö  $\sum_{i=1}^k \sum_{A \in \mathcal{P}_i(Y)} (-1)^{i+1} (k-i)^n = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k-i)^n$ . Edellä esitetyn nojalla on voimassa  $\left| \bigcup_{y \in Y} F_y \right| = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k-i)^n$ . Näinollen pätee, että

$$\begin{aligned} |S(X, Y)| &= |K(X, Y)| - \left| \bigcup_{y \in Y} F_y \right| \\ &= k^n - \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \quad \square \end{aligned}$$

**A 2.8 Korollaari** Jos  $n$  ja  $k$  ovat luonnollisia lukuja ja  $n < k$ , niin tällöin on voimassa

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = 0 = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} i^n.$$

**Todistus.** Olkoon siis voimassa  $n < k$ . Tällöin  $S([n], [k]) = \emptyset$  ja tästä seuraa, että on voimassa

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = 0. \quad (*)$$

Koska jokaisella  $0 \leq i \leq k$  on voimassa  $\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i}$  ja  $(-1)^{k-i} = (-1)^k (-1)^i$ , niin yhtälöstä (\*) seuraa yhtälö  $(-1)^k \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{k-i} (k-i)^n = 0$ . ja tästä seuraa sijoituksella  $j = k - i$  yhtälö  $\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n = 0$ .  $\square$