

## Matematiikka tutuksi, kesä 2011

HY, Avoin yliopisto

Harjoitus 5

1. Mikä on jonon 5, 13, 21, 29, 37, ... kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa?
2. Mikä on jonon 1, 2, 4, 8, 16, ... kymmenen ensimmäisen jäsenen summa? Mitä on  $2^{10}$ ? Mitä huomaat?

3. Todista induktiolla, että

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

4. Etsi virhe seuraavasta induktiotodistuksesta.

Missä tahansa lammassjoukossa kaikki lampaat ovat samanvärisiä. Todistus induktiolla lampaiden määrän suhteen: Lammas on tietysti itsensä kanssa samanvärisen, joten väite pätee kun lampaiden määrä on 1. Oletetaan sitten että kaikissa  $n$ :n lampaan joukoissa kaikki lampaat ovat samanvärisiä. Olkoon  $A$  nyt jokin  $n + 1$ :n lampaan joukko. Ottamalla yksi lammas tästä joukosta pois saadaan  $n$ :n lampaan joukko, joten induktio-oletuksen nojalla nämä ovat kaikki samanvärisiä. Mutta ottamalla pois eri lammas, saadaan toinen  $n$ :n lampaan joukko, jossa kaikki lampaat ovat samanvärisiä, eli alunperin poistettu lammas on samanvärisen muiden joukossa olevien lampaiden kanssa ja vastaavasti on myös jälkimmäinen poisotettu lammas. Siispä missä tahansa  $n + 1$ :n lampaan joukossa kaikki lampaat ovat samanvärisiä. Nyt induktioperiaatteen nojalla kaikissa lammassjoukoissa kaikki joukon lampaat ovat samanvärisiä, erityisesti kaikki maailman lampaat ovat samanvärisiä.

5. Epidemiologian tutkimusryhmä koostuu viidestä matemaatikosta ja kahdesta biologista. Tutkimusryhmä arpoo viikottain kaksi henkilöä kahvinkeitäjiksi tutkimusryhmätapaamiseen. Millä todennäköisyydellä eräänä viikkona valitaan kahvinkeitäjiksi molemmat biologit? Entä millä todennäköisyydellä valitaan kaksi matemaatikkoa?
6. Kahdeksanhenkisen jazzyhtyeen jäsenet asettuvat satunnaisesti esityksen jälkeen lavalle riviin kumartaakseen yleisölle. Bändin rumpali ja basisti ovat yhtä pitkiä, sillä he ovat veljeksiä. Kaikki muut jäsenet ovat keskenään eri pituisia. Millä todennäköisyydellä yhtyeen jäsenet ovat oikealta vasemmalle päin kasvavassa pituusjärjestyksessä? Ei siis ole väliä, onko rumpali ennen basistia vai ei.