

Matematiikka tutuksi, kesä 2011

HY, Avoin yliopisto

Harjoitus 2

Ratkaise kuusi tehtävää.

1. Todista, että kaikilla joukoilla A , B ja C pätee $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Piirrä tilanteesta Vennin diagrammi.

Tässä tehtävässä oli aiemmin virhe.

2. Mitkä seuraavista ovat joukon $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ alkioita? Entä osajoukkoja?

- (a) \emptyset
- (b) $\{\emptyset\}$
- (c) $\{\{\emptyset\}\}$
- (d) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

3. Anna esimerkki

- (a) joukoista A ja B , joilla $A \not\subset B$ ja $B \not\subset A$
- (b) joukoista X ja Y , joilla ei ole olemassa injektiota $f : X \rightarrow Y$
- (c) joukoista N ja M , joilla $N \subset M$, mutta $M \not\subset N$.

Merkintä " $a \not\subset b$ " tarkoittaa, että $a \subset b$ ei päde.

4. Ovatko seuraavat funktiot injektioita? Entä surjektioita?

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$
- (b) $\pi : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{Z}, \pi(n) = n$:s alkuluku, eli $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 5, \dots$
- (c) $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

5. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

- (a) $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
- (b) Joukon X alkion alkio on myös joukon X alkio.
- (c) Joukon X osajoukon osajoukko on myös joukon X osajoukko.
- (d) Jos $A \subset B$, niin $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

6. Näytä, että jos $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow Z$ ovat injektioita, niin $g \circ f : X \rightarrow Z$ on injektio. Näytä vastaava myös surjektioille.

7. Välillä voi olla hankalaa keksiä bijektioita kahden joukon välille, vaikka ne olisivatkin yhtä mahtavat. *Cantor-Schröder-Bernsteinin lause* on matemaattinen tulos, joka sanoo, että mikäli joukosta A on injektio joukkoon B ja joukosta B on injektio joukkoon A , niin A ja B ovat yhtämahtavat, eli myös bijektio löytyy. Osoita, että joukot $]0, 1[$ ja $]0, 1]$ ovat yhtä mahtavat. Mikäli et keksi joukkojen välille bijektioita, voit käyttää Cantor-Schröder-Bernsteinin lausetta.