Kombinatoriikka
Loppukoe 5.10. 2010

1. Ratkaise seuraavat kombinatoriset laskutehtävät perustellen.

   a) Olkoon $n = 2k > 0$ parillinen luku. Kuinka monelle jonolle $(a_1, \cdots, a_n)$ pätee, että $a_i \in \{-1, 1\}$ kaikilla $i \in [n]$ ja $|\sum_{i=1}^n a_i| \leq 2$?

   Ratkaisu Ehto $|\sum_{i=1}^n a_i| \leq 2$ tarkoittaa, että -1-termien lukumäärä a ja $+1$-termien lukumäärä b toteuttavat ehdon $a - b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Lisäksi $a - b = a + b - 2b = 2k - 2b$ on parillinen, joten vaihtoehdoiksi jää $a - b \in \{-2, 0, 2\}$. Täten $a \in \{k - 1, k, k + 1\}$. Kutakin a:n arvoa kohti termien -1 paikat jonossa voidaan valita $\binom{2k}{a}$ tavalla. Summaperiaatteen nojalla kysyttyjä jonoja on siis

$$\binom{2k}{k-1} + \binom{2k}{k} + \binom{2k}{k+1} = \frac{(3k+1)(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

   b) Ravintolapöytään on tilattu a alkuruokaa p pääruokaa sekä j juomaa. Kuinka monessa järjestyksessä tilatut tuotteet voidaan tuoda pöytään yksi kerrallaan niin, että jokainen alkuruoka saapuu ennen ensimmäistä pääruokaa?

   Ratkaisu Olkoot A alkuruokien joukko, P pääruokien joukko ja J juomien joukko. Lasketaan kuinka monessa joukon $A \cup P \cup J$ permutaatiossa $(b_1, \ldots, b_{a+p+j})$ kaikki A:n alkiot esiintyvät ennen P:n alkioita.

   Valitaan ensin mille paikoille permutaatiossa tulevat joukon J alkiot. Tämä valinta voidaan tehdä $\binom{a+p+j}{j}$ tavalla. Vapaista $a + p$ paikasta ensimmäiset a on varattava alkuruuille ja viimeiset p pääruuille. Nyt alkuruokien järjestys voidaan valita $a!$ tavalla, pääruokien järjestys $p!$ tavalla sekä juomien järjestys $j!$ tavalla. Nämä valinnat määräävät halutunlaisen permutaation yksikäsitteisesti. Tuloperiaatteen nojalla siis tuotteiden järjestys voidaan valita

$$\binom{a+p+j}{j} a!p!j! = \frac{a!p!}{(a+p)!}(a+p+j)! = \binom{a+p}{a}^{-1}(a+p+j)!$$

   tavalla.

2. Osoita kombinatorisella päättelyllä:

a)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ratkaisu Yhtälön vasen puoli on joukon $[n]$ k-osajoukkojen lukumäärä ja oikea puoli $n-k$-joukkojen lukumäärä. Kuvaus $A \mapsto [n] \setminus A$ kuvaa summaperiaatteen nojalla k-osajoukot $n-k$-osajoukoille. Kyseessä on bijektio, sillä sama kaava $A \mapsto [n] \setminus A$ määrittelee käänteiskuvauksen $[n]^{(n-k)} \to [n]^{(k)}$. Vertailuperiaatteen nojalla siis k-osajoukkoja ja $n-k$-osajoukkoja on yhtä paljon, mistä saadaan annettu yhtälö.

b)

$$\binom{n}{a}\binom{n}{b} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n-i}{a-i}\binom{n-a}{b-i}$$

Ratkaisu Lasketaan kuinka monella tavalla voidaan valita pari (A, B), missä $A \subseteq [n]$ on a-joukko ja $B \subseteq [n]$ on b-joukko. Tuloperiaatteen nojalla tällaisten parien lukumäärän antaa yhtälöon vasen puoli.

Jaotellaan parit (A, B) leikkauksen niiden leikkaiksen mahtavuuden $|A \cap B| = i$ mukaan. Kun luku $0 \leq i \leq n$ on kiinnitetty, leikkaus $A \cap B$ voidaan valita $\binom{n}{i}$ tavalla. Joukon $A \setminus B$ alkiot voidaan valita $n-i$-joukosta $[n] \setminus A \cap B$ sitten $\binom{n-i}{a-i}$ tavalla. Joukon $B \setminus A$ alkioita on $b-i$ ja ne on nyt valittava $n-a$-joukosta $[n] \setminus A$, joten vaihtoehtoja on $\binom{n-a}{b-i}$. Kutakin i kohti siis valinta voidaan tehdä tuloperiaatteen nojalla

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{a-i}\binom{n-a}{b-i}$$

tavalla. Summaperiaatteen nojalla lasketaan yhteen eri i:n arvoja vastaavien tapausten lukumäärät, jolloin saadaan väitetyn yhtälön oikea puoli.

3. Laske seuraavan laudan tornipolynomi. Kuinka monella tavalla laudalle voidaan asettaa neljä toisian uhkaamatonta tornia?

Ratkaisu Käytetään monisteessa esiintyviä laskusääntöjä ja merkintöjä.

$$\begin{pmatrix}\square & \square & \square \\ & \square & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\square & \square & \square\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}\square & & \square\end{pmatrix} = 1 + 3x + x(1+2x)$$

$$= 1 + 4x + 2x^2.$$

Tulosäännön nojalla siis annetun laudan tornipolynomi on

$$(1+4x+2x^2)^3 = 1 + 12x + 54x^2 + 112x^3 + 108x^4 + 48x^5 + 8x^6.$$

Tornipolynomin määritelmän nojalla laudalle voidaan siis asettaa neljä toisiaan uhaamatonta tornia 108 tavalla.

4. Juhliin saapuu n anteliasta vierasta sekä m saituria. Kukin antelias vieras tuo mukanaan lahjan. Kuinka monella tavalla nämä n lahjaa voidaan jakaa kaikkien vieraiden kesken niin, että kukin vieras saa korkeintaan yhden lahjan ja kukaan anteliaista vieraista ei saa itse tuomaansa lahjaa?

Ratkaisu Numeroidaan vieraat 1-$n+m$, missä anteliaat vieraat saavat numerot 1-n. Ratkaistaan kuinka moni injektio $f : [n] \to [n+m]$ toteuttaa ehdon $f(i) \neq i$ kaikilla $i \in [n]$. Merkitään kullekin $I \subseteq [n]$

$$S_I = \{f \in Inj([n],[n+m]) : f(i) = i \text{ kaikilla } i \in I\}.$$

Kun komplementti otetaan kaikkien injektioiden $[n] \to [n+m]$ joukossa, on siis selvitettävä

$$|(S_{\{1\}} \cup \cdots S_{\{n\}})^C|.$$

Summa- ja erotusperiaatteen avulla tämä voidaan kirjoittaa

$$\sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |S_I|.$$

Jos $|I| = k$, joukon S_I alkio saadaan valitsemalla mielivaltainen injektio $[n] \setminus I \to [n+m] \setminus I$, mikä voidaan tehdä $\frac{(m+n-k)!}{m!}$ tavalla. Kun kiinnitetään k voidaan k-joukko $I \subseteq [n]$ valita $\binom{n}{k}$ tavalla. Täten

$$\sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |S_I| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(m+n-k)!}{m!}.$$