Kombinatoriikka
Loppukoe 26.8. 2010

1. Ratkaise seuraavat kombinatoriset laskutehtävät perustellen.

a) Kuinka monella tavalla voidaan n naisen ja m miehen joukosta valita kolmen henkilön joukko, jossa on vähintään yksi mies ja yksi nainen?

Ratkaisu

Joukkoja joissa on yksi nainen ja kaksi miestä on $\binom{n}{1}\binom{m}{2} = n\binom{m}{2}$ ja joukkoja joissa on yksi mies ja kaksi naista on vastaavasti $m\binom{n}{2}$. Kaikkenkaikkiaan valinta voidaan siis tehdä

$$n\binom{m}{2} + m\binom{n}{2}$$

tavalla.

b) Kun n vierasta jättää takkinsa narikkaan, kuinka monella tavalla takit voidaan jakaa vieraille takaisin niin, että jokainen saa yhden takin ja korkeintaan 2 vierasta saa väärän takin?

Ratkaisu

On mahdotonta, että tasan yksi vieras saa väärän takin. Näinollen joko kaikki saavat oman takkinsa (1 tapaus) tai kaksi vierasta saa toistensa takit ($\binom{n}{2}$ tapausta). Yhteensä takit voidaan siis jakaa

$$\binom{n}{2} + 1$$

tavalla.

c) Kuinka monessa joukon $[n]$ permutaatiossa $(a_1, \ldots, a_n)$ vähintään yksi ehdoista $a_1 = 1$ ja $a_n = n$ toteutuu?

Ratkaisu

Oletetaan, että $n \geq 2$. Ehdon $a_1 = 1$ toteuttavat permutaatiot vastaavat joukon $\{2, 3, \ldots, n\}$ permutaatioita $(a_2, a_3, \ldots, a_n)$, joita on $(n-1)!$. Vastaavasti ehdon $a_n = n$ toteuttavia permutaatioita on $(n-1)!$. Kun $n \geq 2$, permutaatioita, jotka toteuttavat kummankin ehdon on $(n-2)!$, sillä ne vastaavat

$n-2$-joukon $\{2,3,\ldots,n-1\}$ permutaatioita $(a_2,a_3,\ldots,a_{n-1})$. Vastaukseksi saadaan siis

$$2(n-1)!-(n-2)!=(2n-3)(n-2)!.$$

Erikseen todetaan, että kun $n \in \{0,1\}$ vastaukseksi saadaan 1.

2. Olkoon $1 \le k \le n$. Osoita kombinatorisella päättelyllä:

a)

$$\binom{n}{2} = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)$$

Ratkaisu

Yhtälön vasemmalla puolella esiintyvä binomikerroin ilmaiseen joukon $[n]$ 2-osajoukkojen lukumäärän. Osoitetaan, että myös oikealla puolella esiintyvä summa voidaan tulkita samalla tavalla.

Joukon $[n]$ 2-osajoukot voidaan käydä läpi valitsemalla ensin joukon pienempi alkio $i \in [n-1]$. Kun i on valittu, joukon suurempi alkio voidaan valita $n-i$-joukosta $\{i+1,i+2,\ldots,n\}$. Summaperiaatteen nojalla molemmat alkiot voi siis valita yhteensä

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)$$

tavalla.

b)

$$\binom{n}{k}2^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$$

[Huom: alkuperäisessä koepaperissa oli painovirhe b) -kohdassa.]

Ratkaisu

Osoitetaan, että yhtälön kumpikin puoli kertoo kuinka monella tavalla voidaan valita pari (A,B), missä $A \subseteq [n]$ on k-joukko ja $B \subseteq A$.

Joukko A voidaan valita $\binom{n}{k}$ tavalla. Koska A on k-joukko, sillä on 2^k osajoukkoa, eli kutakin A:n valintaa kohti $B \subseteq$ voidaan valita 2^k tavalla. Edellä esitetty tulkinta yhtälön vasemmalle puolelle seuraa siis summaperiaatteesta.

Jos valitaan ensin joukon B mahtavuus $i \le k$ voidaan B valita $\binom{n}{i}$ tavalla. Joukon A loput $k-i$ alkiota voidaan valita $n-i$-joukosta $[n] \setminus B$ tällöin $\binom{n-i}{k-i}$ tavalla. Tuloperiaatteen nojalla kysyttyjä pareja (A, B), missä $|B| = i$ on siis $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$. Käymällä läpi kaikki vaihtoehdot $0 \le i \le k$ saadaan summaperiaatteen nojalla kysyttyjen parien lukumääräksi yhtälön oikea puoli.

3. Olkoon $2 \le 2k \le n$. Kuinka monelle kuvaukselle $f : [n] \to [k]$ pätee, että jokaiselle pisteelle $i \in [k]$ kuvautuu vähintään kaksi pistettä?

Ratkaisu

Määritellään kullekin $I \subseteq [k]$ joukko

$$S_I = \{f : [n] \to [k] : |f^{-1}\{i\}| \le 1 \text{ kaikille } i \in I\}.$$

Kun komplementti otetaan kaikkien kuvausten $f : [n] \to [k]$ joukossa, tehtävänä on ratkaista

$$|(S_{\{1\}} \cup S_{\{2\}} \cup \cdots \cup S_{\{k\}})^C|.$$

Koska

$$S_I = \bigcap_{i \in I} S_{\{i\}}$$

kaikille $I \subseteq [k]$, summa- ja erotusperiaatteen nojalla saadaan

$$|(S_{\{1\}} \cup S_{\{2\}} \cup \cdots \cup S_{\{k\}})^C| = \sum_{I \subseteq [k]} (-1)^I |S_I|.$$

Olkoon $I \subseteq [k]$ m-joukko. Tällöin S_I koostuu kuvauksista $f : [n] \to [k]$, joilla $f[n] \cap I$ on p-joukko jollakin $p \le m$. Jos $p \le m$ on kiinnitetty, kuvaus f voidaan määritellä valitsemalla p-joukko $A \subseteq [n]$, p-joukko $B \subseteq I$ sekä bijektio $f_1 : A \to B$ ja mielivaltainen kuvaus $f_2 : [n] \setminus A \to [n] \setminus I$. Tämä voidaan tehdä

$$\binom{n}{p}\binom{m}{p} p!(k-m)^{n-p}$$

tavalla. Summaamalla yli mahdollisten p:n arvjen saadaan

$$\sum_{p=0}^{m} \binom{n}{p}\binom{m}{p} p!(k-m)^{n-p}.$$

Kutakin $m \le k$ kohti joukko $I \in [k]^{(m)}$ voidaan valita $\binom{k}{m}$ tavalla, joten

$$\sum_{I \in [k]^{(m)}} |S_I| = \binom{k}{m} \sum_{p=0}^{m} \binom{n}{p}\binom{m}{p} p!(k-m)^{n-p}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{k!}{m!(k-m)!}\sum_{p=0}^{m}\binom{n}{p}\frac{m!}{p!(m-p)!}p!(k-m)^{n-p}\\
&=\sum_{p=0}^{m}\binom{n}{p}\frac{k!}{(k-m)!(m-p)!}(k-m)^{n-p}.
\end{aligned}$$

Näinollen

$$\sum_{I\subseteq[k]}(-1)^{I}|S_I| = \sum_{0\le p\le m\le k}(-1)^{m}\binom{n}{p}\frac{k!}{(k-m)!(m-p)!}(k-m)^{n-p}.$$

4. Olkoot n ja m positiivisia kokonaislukuja ja olkoon $B \subseteq [m] \times [n]$ lauta. Olkoon $I = \{(m+1, i) : 1 \le i \le n\}$. Merkitään $C = B \cup I$. Osoita seuraavat väitteet tosiksi.

a) Kun $k \ge 1$ lautojen B ja C torniluvut toteuttavat yhtälön

$$r_k(C) = r_k(B) + r_{k-1}(B)(n-k+1).$$

Ratkaisu

Olkoon $k \ge 1$. Kaikki I:n pisteet ovat samalla pystyrivillä, joten kun laudalle C asetetaan k toisiaan uhkaamatonta tornia, näistä korkeintaan yksi on I:ssä, eli joko k tai $k-1$ tornia on laudalla B. Summaperiaatteen nojalla on laskettava yhteen näitä kahta tapausta vastaavien asettelujen lukumäärät.

Määritelmän nojalla k toisiaan uhkaamatonta tornia voidaan asettaa laudalle B $r_k(B)$ tavalla. Jos laudalle B asetetaan $k-1$ toisiaan uhkaamatonta tornia jollakin r_{k-1} mahdollisesta tavasta, tornit on asetettu joillekin $k-1$ vaakariville. Täten joukossa I on $n-(k-1)$ vapaata pistettä, jotka eivät ole samalla rivillä minkään tornin kanssa ja joille siis voidaan asettaa k:s torni. Tuloperiaatteen nojalla k toisiaan uhkaamatonta tornia, joista $k-1$ on laudalla B ja 1 laudalla I voidaan asettaa $r_k(B)(n-k+1)$ tavalla.

Väite seuraa nyt summaperiaatteesta.

b) Lautojen B ja C tornipolynomit $R_B(x)$ ja $R_C(x)$ toteuttavat yhtälön

$$R_C(x) = (1 + nx)R_B(x) + x^2 \frac{d}{dx} R_B(x),$$

missä polynomin derivaatta on $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Ratkaisu

Käyttämällä a) -kohdan kaavaa saadaan:

$$R_C(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k(C)x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} r_k(B)x^k + \sum_{k=1}^{n} r_{k-1}(B)(n-k+1)x^k$$

$$= R_C(x) + \sum_{k=1}^{n+1} r_{k-1}(B)(n-k+1)x^k = R_C(x) + \sum_{k=0}^{n} r_k(B)(n-k)x^{k+1}$$

$$= R_C(x) + nx \sum_{k=0}^{n} r_k(B)x^k - x^2 \sum_{k=1}^{n} r_k(B)kx^{k-1}$$

$$= (1 + nx)R_C(x) - x^2 \frac{d}{dx} R_C(x).$$