Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 6
Ratkaisuehdotuksia (RT) (4 sivua)

1. Olkoon $n \geq 4$. Laske kuinka moni joukon $[n]$ permutaatio $(a_1, \cdots, a_n)$ toteuttaa seuraavan ehdon:

a) Luku 1 esiintyy ennen lukua 2 ja luku 3 esiintyy ennen lukua 4.

b) Kaikilla $i, j \in [n]$ pätee $a_i - a_j = a_{n+1-j} - a_{n+1-i}$.

c) Molemmat ehdot a) ja b).

Ratkaisu.
a) Valitaan ensin paikat permutaatiossa luvuille 1 ja 2. Koska ko. lukujen järjestys on sidottu, niin ne voivat kuvautua halutusti täsmälleen $\binom{n}{2}$ tavalla. Kun nämä paikat on kiinnitetty, niin samalla periaatteella lukujen 3 ja 4 paikoille saadaan (nyt jäljellä $n-2$ paikkaa) $\binom{n-2}{2}$ eri tapaa kuvautua. Loput $n-4$ alkiota voivat kuvautua $(n-4)!$ eri tavalla, joten tuloperiaatteen nojalla haluttuja permutaatioita on yhteensä

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}(n-4)! \text{ kpl.}$$

b) Jaetaan luvut $1, ..., n$ pareihin $\{k, n+1-k\}$ (yksi luku jää yli, kun n on pariton). Kussakin parissa yhden luvun paikka permutaatiossa määrää toisen luvun paikan yksikäsitteisesti. Jos $m = \lfloor n/2 \rfloor$ (siis $n/2$ pyöristettynä alaspäin seuraavaan kokonaislukuun) voidaan ensin valita joukon $[m]$ permutaatio $(b_1, ..., b_m)$. Sitten tehdään 2^m valintaa, tuleeko paikalle a_i luku b_i vai $n+1-b_i$, kun $i \leq k$. Tämä määrää koko permutaation $(a_1, ..., a_n)$ yksikäsitteisesti. (Huom! Kun n on pariton, niin $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ kuvautuu itselleen!)

Ehdon toteuttavia permutaatioita on yhteensä

$$m!2^m, \ m = \lfloor n/2 \rfloor.$$

c) Olkoon taas $m = n/2$ pyöristettynä alas ja oletetaan, että $n > 7$.
Valitaan ensin kaksi eri indeksiä $i < j$ joukosta $1, 2, ..., m$: $\binom{m}{2}$ valintaa.
Sitten sijoitetaan luvut $1, 2$ joillekin kahdelle paikalle
$a_i = 1, a_j = 2$

$a_i = 1, a_(n+1-j) = 2$
$a_j = 1, a_(n+1-i) = 2$
$a_(n+1-j) = 1, a_(n+1-i) = 2$
Yhteensä $\Rightarrow$ 4 tapaa.

Toistaiseksi siis tapoja valita lukujen $1, 2$ paikat, jotka määräävät samalla lukujen $n, n-1$ paikat on $4\binom{m}{2}$. Menetellään lukujen $3, 4$ kanssa samoin, nyt indeksejä jäljellä enää $m-2$, joten saadaan $4\binom{m-2}{2}$ valintaa. Kaikkien muiden lukujen paikat permutaatiossa voidaan nyt b)-kohdan nojalla valita $(m-4)!2^{m-4}$ tavalla. Yhteensä siis ehdot täyttäviä permutaatioita on

$$4\binom{m}{2} \cdot 4\binom{m-2}{2} \cdot (m-4)!2^{m-4} = \binom{m}{2} \cdot \binom{m-2}{2} \cdot (m-4)! \cdot 2^m$$

$$= \frac{m!2^m}{4} \text{ kpl.}$$

2. Osoita kombinatorisella päättelyllä:

a)
$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

b)
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k,$$

missä D_k on joukon $[k]$ kiintopisteettömien permutaatioiden lukumäärä.

Ratkaisu.
a) Yhtälön vasen puoli kertoo kuinka monella tapaa n-joukko voidaan jakaa kolmeen eri "lokeroon" (sallitaan tapaukset, että johonkin lokeroista tulee kaikki alkiot ja johonkin/joihinkin ei yhtään). Yhtälön oikealla puolella valitaan ensin k-osajoukko ($\binom{n}{k}$ tapaa) ja nämä jaetaan kahteen lokeroon mielivaltaisesti (2^k tapaa). Loput $n-k$ alkiota laitetaan kolmanteen lokeroon.

Käymällä läpi kaikki k-osajoukot saadaan kaikkien jakojen lukumäärä, kun n alkiota jaetaan kolmeen eri lokeroon (eli yhtälön vasen puoli).

b) Yhtälön vasen puoli kertoo n-joukon kaikkien permutaatioiden lukumäärän. Yhtälön oikea puoli taas voidaan ajatella niin, että valitaan kaikkien permutaatioiden joukosta ne, joissa täsmälleen k pistettä on epäjärjestyksessä (näillä on siis $n-k$ kiintopistettä). Nyt näitä joukkoja on yhteensä $\binom{n}{k}$ erilaista ja jokaisella on D_k:n verran mahdollisuuksia olla epäjärjestyksessä. Loput alkiot eli $n-k$ kiintopistettä kuvautuvat itselleen (yksikäsitteisesti). Käymällä läpi kaikki k-osajoukot saadaan summasta $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$ kaikkien n-joukon permutaatioiden lukumäärä (eli yhtälön vasen puoli).

3. Olkoot $1 \leq k \leq n$. Kuinka moni funktio $f : [k] \to [n]$ on aidosti kasvava, eli toteuttaa ehdon

$$f(1) < f(2) < \cdots < f(k)?$$

Ratkaisu.

Kaikista funktioista $\binom{n}{k}$ toteuttavat tehtävän ehdon. Tämä on seurausta siitä, että k-joukon alkioiden kuvat $f(k)$ ovat suuruusjärjestyksellä sidotut: valitaan kuvajoukosta $[n]$ "paikat" k-joukon alkioille. Alkioilla on vain yksi tapa (suuruusjärjestys) kuvautua kutakin valittua kuvajoukkoa kohti.

4. Olkoon $n \geq 1$. Suoran tien varrella on yhdellä puolella talot $t_1, \ldots, t_n$ ja toisella puolella talot $h_1, \ldots, h_n$. Kuinka monella tavalla talot voidaan maalata k värillä niin, että vierekkäiset talot t_i, t_{i+1} tai h_i, h_{i+1}, $i \in [n-1]$ saavat eri värit ja lisäksi vastakkaiset talot t_i, h_i, $i \in [n]$ saavat eri värit?

Ratkaisu.

Oletetaan, että taloparit t_i, h_i ovat maalatut sopivasti kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$. Merkitään näiden eri tapojen lukumäärää $f(n-1,k)$:lla. Jos talo t_n maalataan eri värillä, kuin talo h_{n-1}, niin vaihtoehtoja on $k-2$, jonka jälkeen talo h_n voidaan maalata myös $k-2$ tavalla. Jos taas talo t_n maalataan samalla värillä, kuin talo h_{n-1} (eli 1 vaihtoehto), niin h_n voidaan maalata $k-1$ eri tavalla. Siis summaperiaatteen nojalla f toteuttaa rekursiokaavan

$$f(n,k) = f(n-1,k)((k-2)^2 + 1 \cdot (k-1)) = f(n-1,k)(k^2 - 3k + 5).$$

Nyt samalla tavalla $f(n-1,k) = f(n-2,k)(k^2-3k+5)$, joten $f(n,k) = f(n-2,k)(k^2-3k+5)^2$. Näin jatkamalla saadaan $f(n,k) = f(1,k)(k^2-3k+5)^{n-1}$, missä $f(1,k)$ on niiden tapojen lukumäärä, joilla talot t_1 ja h_1 voidaan maalata eri värisiksi, kun käytössä on k maalia. Siten $f(1,k) = k(k-1)$ ja

$$f(n,k) = k(k-1)(k^2-3k+5)^{n-1}.$$

Huom! Pättelyn voi tehdä myös suoraan: Maalataan talot t_1 ja h_1 ($k(k-1)$ eri tapaa), jonka jälkeen talot t_2 ja h_2 voidaan maalata $(k-2)^2 + 1 \cdot (k-1)$ tavalla (päättely sama kuin edellä). Tämä toisen rivin päättely toistuu $n-1$ kertaa ja siten $f(n,k) = k(k-1)(k^2-3k+5)^{n-1}$.

5. Tilaisuuteen saapuu $l \geq 1$ lasta ja $a \geq 0$ aikuista. Lasten ja aikuisten kesken jaetaan $n \geq l$ (erilaista) palkintoa. Kuinka monella tavalla palkinnot voidaan jakaa niin, että jokainen lapsi saa vähintään yhden palkinnon?

Ratkaisu.
Olkoon L lasten joukko ja A aikuisten joukko. Kullakin $I \subseteq L$ on olemassa joukko S_I kuvauksia $f : [n] \to L \cup A$, joille $f(k) \notin I$ kaikilla $k \in [n]$. Toisin sanoen $f \in S_I$, jos jokainen lapsi i, $i \in I$ jää ilman lahjaa.

Olkoon S kaikkien kuvausten $[n] \longrightarrow [a+l]$ joukko. Siis S koostuu kaikista mahdollisista lahjojen jakotavoista. tehtävässä halutaan laskea, kuinka monta kuvausta ei ole missään joukoista S_I. Toisin sanoen tehtävässä täytyy laskea joukon $S \setminus \bigcup_{I \subset L} S_I$ mahtavuus. Käytetään summa- ja erotusperiaatetta, jota varten täytyy tietää leikkausten $\bigcap_{i \in I} S_i$ mahtavuudet. Tämä tarkoittaa kaikkien niiden tapojen lukumäärää, joilla voi lahjat jakaa niin, että ainakaan kukaan lapsista $i \in I$ ei saa lahjaa.

Olkoon $|I| = k$, $k = 0, 1, \ldots, l$. Nyt lahjat, joita on n kpl, voidaan jakaa yhteensä $(a+l-k)^n$ tavalla siten, että ainakaan kyseiset k lasta eivät saa yhtään lahjaa (jokaiselle lahjalle $a+l-k$ mahdollista saajaa). Lisäksi näitä erilaisia joukkoja on $\binom{l}{k}$ kpl. Näin ollen voidaan käydä läpi osajoukot $I \subseteq L$ niiden mahtavuuksien mukaan ja siten pätee

$$\sum_{I \subseteq L} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} S_i| = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} (a+l-k)^n.$$