Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 6

1. Olkoon $n \geq 4$. Laske kuinka moni joukon $[n]$ permutaatio $(a_1, \cdots, a_n)$ toteuttaa seuraavan ehdon:

a) Luku 1 esiintyy ennen lukua 2 ja luku 3 esiintyy ennen lukua 4.

b) Kaikilla $i, j \in [n]$ pätee $a_i - a_j = a_{n+1-j} - a_{n+1-i}$.

c) Molemmat ehdot a) ja b).

2. Osoita kombinatorisella päättelyllä:

a)

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2.$$

b)

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k,$$

missä D_k on joukon $[k]$ kiintopisteettömien permutaatioiden lukumäärä.

3. Olkoot $1 \leq k \leq n$. Kuinka moni funktio $f : [k] \to [n]$ on aidosti kasvava, eli toteuttaa ehdon

$$f(1) < f(2) < \cdots < f(k)?$$

4. Olkoon $n \geq 1$. Suoran tien varrella on yhdellä puolella talot $t_1, \ldots, t_n$ ja toisella puolella talot $h_1, \ldots, h_n$. Kuinka monella tavalla talot voidaan maalata k värillä niin, että vierekkäiset talot t_i, t_{i+1} tai h_i, h_{i+1}, $i \in [n-1]$ saavat eri värit ja lisäksi vastakkaiset talot t_i, h_i, $i \in [n]$ saavat eri värit?

5. Tilaisuuteen saapuu $l \geq 1$ lasta ja $a \geq 0$ aikuista. Lasten ja aikuisten kesken jaetaan $n \geq l$ (erilaista) palkintoa. Kuinka monella tavalla palkinnot voidaan jakaa niin, että jokainen lapsi saa vähintään yhden palkinnon?

Koe on 26.8.2010 kello 10.00-12.00 auditoriossa B123. Kokeessa on käytettävissä kirjoitusvälineet sekä YO-kirjoituksiin hyväksyttävä laskin.