Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 5
Ratkaisuehdotuksia (RT) (6 sivua)

1. Kansainväliseen kokoukseen tarvitaan tulkkeja tulkkaamaan englannista muille kielille. Talon vakiotulkit ovat Mari, Sari, Heli ja Pasi ja tulkkeja tarvitaan kiinan, venäjän, swahilin ja espanjan kielille. Mari osaa espanjaa ja venäjää, Sari osaa espanjaa, Heli osaa espanjaa ja venäjää ja Pasi osaa venäjää, kiinaa ja swahilia. Piirrä tilanteeseen liittyvä lauta ja laske sen tornipolynomi. Kuinka monella tavalla voidaan kolmelle neljästä kielestä tulkata käyttämällä talon vakiotulkkeja?

Ratkaisu.
Piirretään lauta $B \subseteq [4] \times [4]$ nimeämällä pystyrivit tulkkien (M, S, H, P) ja vaakarivit kielien (ki, ve, sw, esp) mukaan. Lauta B muodostuu nyt niistä 8:sta ruudusta, jotka ovat tulkin ja hänen tulkkaamansa kiel(i)en risteyksessä laudalla.

Tornipolynomin voi laskea luentomonisteen sivulla esitellyin menetelmin (ks. s.35-37) ja esimerkin 4.12. tapaan. Tornipolymoniksi pitäisi lopulta tulla

$$R = 1 + 8x + 17x^2 + 8x^3.$$

Jos kieliä on kolme ja kaikkia tulkaamaan tarvitaan eri tulkki, niin tästä joukosta mahdollinen tulkkien valinta voidaan tehdä 8 (eli x^3:n kerroin) eri tavalla.

2. Pitkässä pöydässä on $2n$ paikkaa, joista kaksi on aina toisiaan vastapäätä. Juhlien alussa $2n$ vierasta istuu paikoilleen kunnes kaikki vieraat siirtyvät tanssilattialle. Vieraista valitaan k ja lähetetään heidät takaisin päytään joillekin k paikalle, jokainen joko vanhalle paikalleen tai sitä vastapäätä olevalle paikalle. Kuinka monella tavalla tämä voidaan tehdä?

[Ohje: määrittele sopiva lauta $B \subseteq [2n] \times [2n]$ ja laske sen tornipolynomi. Käytä hyväksi tornipolynomien tulosääntää. Sovella binomilausetta kaksi kertaa peräkkäin ja laske tornipolynomissa esiintyvä x^k:n kerroin.]

Ratkaisu.
Numeroidaan pöydän paikat siten, että ensimmäinen (jostain kulmasta lähtien) on numero 1 ja sitä vastapäätä oleva paikka on 2. Paikka 3 on 1:n

viereinen ja 4 sitä vastapäätä, 2:n vieressä. Näin paikat on numeroitu siten, että toisella puolella on parittomat, toisella parilliset ja paikat m ja $m+1$, kun m on pariton, ovat toisiaan vastapäätä.

Muodostetaan $[2n]\times[2n]$ lauta siten, että pystyrivit nimetään alkuperäisten paikkojen numeroiden mukaan ja vaakarivit tanssin jälkeisten paikkojen mukaan. Tällöin tehtävään sopiva lauta B on sellainen missä laudan ruudut ovat muotoa (i,i) tai $(i,i+1)$ (kun i pariton) tai $(i,i-1)$ (kun i parillinen), missä siis $i=1,2,\ldots,2n$. Nyt lauta B muodostuu neljän ruudun muodostamista 2×2-neliöistä. Näitä "isoja" neliöitä on yhteensä n kpl ja ne ovat kiinni toisissaan vain kulmista. Siten mikään 2×2-neliöön asetettu torni ei uhkaa toisen 2×2-neliön mitään tornia. Tällöin (Lause 4.11., luentomoniste s.36) tornipolynomi saadaan "osaneliöiden" tornipolynomien välisenä tulona. Merkitään "osaneliöitä" B_i, $i=1,2,\ldots,n$, jolloin $B=\bigcup_{i=1}^n B_i$. Nyt siis

$$R(B,x)=R(\bigcup_{i=1}^n B_i,x)\prod_{i=1}^n R(B_i,x)=R(B_j,x)^n,$$

kun j on mikä tahansa indekseistä $i=1,2,\ldots,n$. Lisäksi $R(B_j,x)=1+4x+2x^2$. Sovelletaan vihjeen mukaisesti binomilausetta (luentomoniste s.13), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
(1+(4x+2x^2))^n &\overset{BL}{=} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}1^{n-i}(4x+2x^2)^i=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}4^ix^i(1+\frac{1}{2}x)^i\\
&\overset{BL}{=} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}4^ix^i(\sum_{j=0}^i\binom{k}{j}(\frac{1}{2})^jx^j)=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^i\binom{n}{i}\binom{i}{j}4^i2^{-j}x^{i+j}\\
&= \sum_{0\le j\le i\le n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}2^{2i-j}x^{i+j}.
\end{aligned}$$

Nyt x^k:n kertoimeen tulevat ne termit, joissa $i+j=k \Leftrightarrow i=k-j$. Nämä ovat muotoa

$$\sum_{j=0}^n\binom{n}{k-j}\binom{k-j}{j}2^{2k-3j}.$$

Huomaa, että kaikilla $j>k/2$ termit summassa ovat nollia (tällöin $k-j<j$).

Siten hieman elegantimpi vastaus on

$$\sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{n}{k-j} \binom{k-j}{j} 2^{2k-3j},$$

jossa $\lfloor k/2 \rfloor$ tarkoittaa lukua $k/2$ pyöristettynä alaspäin seuraavaan kokonaislukuun, ellei se ole kokonaisluku (tällöin $\lfloor k/2 \rfloor = k/2$).

3. Olkoon $B \subseteq [n] \times [n]$. Merkitään kaikilla $b \in B$

$$U(b) = \{x \in B \ : x \text{ ja } b \text{ ovat samalla pysty- tai vaakarivillä.}\}.$$

Osoita että jos joukon $I \subseteq B$ pisteet ovat kaikki samalla pysty- tai vaakarivillä, niin

$$R(B, x) = R(B \setminus I, x) + x(\sum_{i \in I} R(B \setminus U(i), x))$$

[Ohje: totea, että kun laudalle asetetaan toisiaan uhkaamattomia torneja, korkeintaan yhdelle pisteistä $i \in I$ tulee torni. Käytä summaperiaatetta ja jäljittele yhden pisteen tapaukselle esitettyä todistusta.]
Ratkaisu.

I tapa:
Sijoitetaan laudalle B k kpl toisiaan uhkaamattomia torneja. Tällöin korkeintaan yhdessä I:n pisteessä i voi olla torni. Erilaisia tapauksia sijoittaa tornit sen suhteen, onko yksikään torni I:ssä ja jos on, niin missä pisteessä, on siis $|I| + 1$ kpl. Nyt

i) Tapoja sijoittaa k kpl torneja laudalle B siten, että millekään $i \in I$ ei tule tornia (1 tapaus), on yhteensä $r_k(B \setminus I)$.

ii) Jos taas jollekin pisteelle $i \in I$ sijoitetaan yksi torni ($|I|$ eri tapausta), niin tapoja sijoittaa loput $k - 1$ tornia (joista yksikään ei sijoitu I:lle) on $r_{k-1}(B \setminus U(i))$. Koska I:n pisteet ovat kaikki samalla rivillä, niin kaikki nämä tapaukset ovat erillisiä!

Nyt torniluvuksi saadaan summaperiaatteella

$$r_k(B) = r_k(B \setminus I) + \sum_{i \in I} r_{k-1}(B \setminus U(i)).$$

Edelleen voidaan laskea tornipolynomi

$$\begin{aligned} R(B,x) &= \sum_{k=0}^{n} r_k(B)x^k = \sum_{k=0}^{n} \big(r_k(B \setminus I) + \sum_{i\in I} r_{k-1}(B \setminus U(i))\big)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} r_k(B \setminus I)x^k + \sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in I} r_{k-1}(B \setminus U(i))x^k. \end{aligned}$$

Vaihdetaan yhtälön oikealla puolen viimeisessä termissä summauksien järjestystä ja otetaan x eteen yhteiseksi tekijäksi. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in I} r_{k-1}(B\setminus U(i))x^k = x\sum_{i\in I}\sum_{k=0}^{n} r_{k-1}(B\setminus U(i))x^{k-1} = x\sum_{i\in I} r_k(B\setminus U(i))x^k.$$

Siis $R(B,x) = R(B \setminus I, x) + x\sum_{i\in I} R(B \setminus U(i), x)$.

II tapa:

Hieman työläämpi tapa on osoittaa väite induktiolla, mutta onnistuu myös siten.

Voidaan olettaa, että $I \neq \emptyset$. Olkoon $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} := I_m$, $|I_m| = m \leq n$. Olkoon $i_s \in I_m$, siis $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Lauseen 4.10. nojalla pätee

$$R(B,x) = R(B \setminus \{i_s\}, x) + xR(B \setminus U(i_s), x),$$

joten induktiotodistuksen alkuaskel, $|I_m| = 1$, on otettu. Oletetaan sitten, että väite pätee jollakin $k \leq m$ eli

$$R(B,x) = R(B \setminus I_k, x) + x\sum_{i\in I_k} R(B \setminus U(i), x)$$

ja todistetaan, että lauseke on tosi myös $k+1$:llä.

$$\begin{aligned} R(B,x) &= R(B \setminus I_k, x) + x\sum_{s\in[k]} R(B \setminus U(i_s), x) \\ &= R\big((B \setminus I_k)\setminus\{i_{k+1}\}, x) + xR\big((B \setminus I_k)\setminus U(i_{k+1}), x\big) + x\sum_{s\in[k]} R(B \setminus U(i_s), x) \\ &= R(B \setminus I_{k+1}, x) + xR(B \setminus U(i_{k+1}), x) + x\sum_{s\in[k]} R(B \setminus U(i_s), x) \\ &= R(B \setminus I_{k+1}, x) + x\sum_{s\in[k+1]} R(B \setminus U(i_s), x). \end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla siis $R(B, x) = R(B \setminus I_m, x) + x \sum_{i \in I_m} R(B \setminus U(i), x)$ pätee. Koska $m \leq n$ oli mielivaltainen, niin voidaan kirjoittaa $I_m = I$, kun $m = n$, joten $[m] = [n]$ ja tehtävän väite (alkuperäisessä muodossaan) on todistettu.

4. Merkitään laudan $[n] \times [m]$ tornipolynomia $R_{n,m}(x)$. Osoita, että kaikille $m, n \geq 1$ pätee

$$R_{n,m}(x) = R_{n-1,m}(x) + xmR_{n-1,m-1}(x).$$

Ratkaisu.
Päästään helpolla, kun käytetään edellisessä tehtävässä osoitettua kaavaa. Olkoon I $[n] \times [m]$-laudan n.:s pystyrivi. Huomaa, että $|I| = m$. Tehtävän 3 nojalla

$$R_{n,m}(x) = R(B \setminus I, x) + x \sum_{i \in I} R(B \setminus U(i), x).$$

Huomataan, että $B \setminus I$ on itse asiassa $[n-1] \times [m]$-lauta; siis $R(B \setminus I, x) = R_{n-1,m}(x)$. Lisäksi nyt kaikilla $i_m \in I$, $m \in [m]$, joukko $U(i)$ on $I \cup M$, missä M on se (m.:s) vaakarivi, jolla i sijaitsee. Siten $R(B \setminus U(i), x) = R_{n-1,m-1}(x)$. Näin ollen

$$R_{n,m}(x) = R_{n-1,m}(x) + xmR_{n-1,m-1}(x).$$

Yhtälön voi osoittaa todeksi myös purkamalla tornipolynomin auki määritelmän mukaan. Se on kuitenkin tässä aika työläs ja aikaa vievä.

5. Osoita käyttämättä osumapolynomien teoriaa, että jos $B \subseteq [n] \times [n]$ on lauta, niin

$$|\{\pi \in S_n : G(\pi) \cap B = \emptyset\}| = \sum_{k=0}^{n} (-1) r_k(B)(n-k)!.$$

Ohje: käytä summa- ja erotusperiaatetta. Määritellään kullekin $b \in B$

$$A_b = \{\pi \in S_n : b \in G(\pi)\}.$$

Tällöin

$$\{\pi \in S_n : G(\pi) \cap B = \emptyset\} = S_n \setminus (\bigcup_{b \in B} A_b).$$

Ratkaisu.

Summa- ja erotusperiaatteen nojalla

$$\left|S_n \setminus (\bigcup_{b \in B} A_b)\right| = \sum_{I \subset B} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|,$$

joten tutkitaan leikkauksien $\bigcap_{i \in I} A_i$ mahtavuuksia riippuen osajoukosta I.

Lemman 4.13 (luentomoniste, s.38) nojalla

$$\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = |\{\pi \in S_n : i \in G(\pi) \text{ kaikilla } i \in I\}| = |\{\pi \in S_n : I \subseteq G(\pi)\}|$$

saa arvon $(n-k)!$, kun I:ssä ei ole toisiaan uhkaavia pisteitä, ja 0, kun I:ssä on toisiaan uhkaavia pisteitä.

Olkoon $I \subseteq B$ siten, että $|I| = k$. Nyt kaikilla näillä I pätee

$$\sum_{I \subseteq B, |I| = k} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = (n-k)! r_k(B),$$

sillä $r_k(B)$ kertoo kuinka monella tavalla k pistettä voidaan valita siten, että ne eivät uhkaa toisiaan. Toisin sanoen $r_k(B)$ on niiden leikkausten $\bigcap_{i \in I} A_i$ lukumäärä, joille pätee $\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = (n-k)!$; muutoin leikkausten mahtavuus on 0. Näin ollen

$$\left|S_n \setminus (\bigcup_{b \in B} A_b)\right| = \sum_{I \subset B} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k(B)(n-k)!.$$