Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 5

1. Kansainväliseen kokoukseen tarvitaan tulkkeja tulkkaamaan englannista muille kielille. Talon vakiotulkit ovat Mari, Sari, Heli ja Pasi ja tulkkeja tarvitaan kiinan, venäjän, swahilin ja espanjan kielille. Mari osaa espanjaa ja venäjää, Sari osaa espanjaa, Heli osaa espanjaa ja venäjää ja Pasi osaa venäjää, kiinaa ja swahilia. Piirrä tilanteeseen liittyvä lauta ja laske sen tornipolynomi. Kuinka monella tavalla voidaan kolmelle neljästä kielestä tulkata käyttämällä talon vakiotulkkeja?

2. Pitkässä pyödässä on $2n$ paikkaa, joista kaksi on aina toisiaan vastapäätä. Juhlien alussa $2n$ vierasta istuu paikoilleen kunnes kaikki vieraat siirtyvät tanssilattialle. Vieraista valitaan k ja lähetetään heidät takaisin pöytään joillekin k paikalle, jokainen joko vanhalle paikalleen tai sitä vastapäätä olevalle paikalle. Kuinka monella tavalla tämä voidaan tehdä?

[Ohje: määrittele sopiva lauta $B \subseteq [2n] \times [2n]$ ja laske sen tornipolynomi. Käytä hyväksi tornipolynomien tulosääntöä. Sovella binomilausetta kaksi kertaa peräkkäin ja laske tornipolynomissa esiintyvä x^k:n kerroin.]

3. Olkoon $B \subseteq [n] \times [n]$. Merkitään kaikilla $b \in B$

$$U(b) = \{x \in B \ : x \text{ ja } b \text{ ovat samalla pysty- tai vaakarivillä.}\}.$$

Osoita että jos joukon $I \subseteq B$ pisteet ovat kaikki samalla pysty- tai vaakarivillä, niin

$$R(B, x) = R(B \setminus I, x) + x(\sum_{i \in I} R(B \setminus U(i), x))$$

[Ohje: totea, että kun laudalle asetetaan toisiaan uhkaamattomia torneja, korkeintaan yhdelle pisteistä $i \in I$ tulee torni. Käytä summaperiaatetta ja jäljittele yhden pisteen tapaukselle esitettyä todistusta.]

4. Merkitään laudan $[n] \times [m]$ tornipolynomia $R_{n,m}(x)$. Osoita, että kaikille $m, n \geq 1$ pätee

$$R_{n,m}(x) = R_{n-1,m}(x) + xmR_{n-1,m-1}(x).$$

5. Osoita käyttämättä osumapolynomien teoriaa, että jos $B \subseteq [n] \times [n]$ on lauta, niin

$$|\{\pi \in S_n : G(\pi) \cap B = \emptyset\}| = \sum_{k=0}^{n} (-1) r_k(B)(n-k)!.$$

Ohje: käytä summa- ja erotusperiaatetta. Määritellään kullekin $b \in B$

$$A_b = \{\pi \in S_n : b \in G(\pi)\}.$$

Tällöin

$$\{\pi \in S_n : G(\pi) \cap B = \emptyset\} = S_n \setminus (\bigcup_{b \in B} A_b).$$