Kombinatoriikka, kesä 2010
Harjoitus 4
Ratkaisuehdotuksia (RT) (6 sivua)

1. Johda monisteessa summa- ja erotusperiaatteen muotoilu

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^C| = \sum_{I \subset [n]} (-1)^{|I|} \Big| \bigcap_{k \in I} A_k \Big|$$

ensin esitellystä muodosta

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{k \in I} A_k \Big|.$$

Ratkaisu.
Minkä tahansa joukon $B \subset X$ komplementin mahtavuus $|X \setminus B|$ saadaan vähentämällä joukon B mahtavuus perusjoukon X mahtavuudesta. Näin ollen kaikilla $A_k \subset A$, $k = 1, \ldots, n$, pätee

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^C| = |A| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Luentomonisteen lauseen 3.3. (s. 23) mukaan

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{k \in I} A_k \Big|.$$

Siispä

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^C| = |A| - \sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{k \in I} A_k \Big| = |A| + \sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} \Big| \bigcap_{k \in I} A_k \Big|.$$

Kun lisäksi asetetaan $\big| \bigcap_{k \in \emptyset} A_k \big| = |A|$ ($|\emptyset| = 0$), niin voidaan kirjoittaa

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^C| = \sum_{I \subset [n]} (-1)^{|I|} \Big| \bigcap_{k \in I} A_k \Big|$$

ja tehtävä on ratkaistu.

2. Laskuharjoituksiin saapuu 24 opiskelijaa. Näistä 9 oli viikonloppuna kuumeessa, 10 uimarannalla koko viikonlopun - kun oli niin kuumaa - ja 5:n tehtävät tuhoutuivat lemmikkieläimen kynsissä. Kuumeisista henkilöistä 3 vietti viikonlopun rannalla ja 3:n tehtävät joutuivat lemmikin uhriksi. Rannalla viikonlopun viettäneistä kahden tehtävät tuhosi lemmikki ja toinen näistä oli lisäksi kuumeessa.

Kuinka moni opiskelija ei ollut rannalla tai kuumeessa ja vältti tehtävien tuhoutumisen lemmikkieläimen kynsissä?

Ratkaisu.
Merkitään kaikkien opiskelijoiden joukkoa A:lla.
Olkoot $A_1 = \{\text{Opiskelija oli kuumeessa}\}$, $A_2 = \{\text{Opiskelija oli uimarannalla}\}$ ja $A_3 = \{\text{Opiskelijan lemmikki tuhosi tehtävät}\}$.

Nyt tiedetään, että $|A| = 24$, $|A_1| = 9$, $|A_2| = 10$ $|A_3| = 5$. Lisäksi $|A_1 \cap A_2| = 3$, $|A_1 \cap A_3| = 3$, $|A_2 \cap A_3| = 2$ ja $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$.

Tehtävässä kysytään niiden opiskelijoiden määrää, jotka eivät olleet rannalla tai kuumeessa ja jotka välttivät tehtävien tuhoutumisen lemmikkieläimen kynsissä. Edellä olevia merkintöjä käyttäen halutaan siis selvittää $|(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^C|$. Voimme käyttää edellisessä tehtävässäkin ollutta seurauslausetta (Lause 3.8., s.23). Nyt $I \subset [3]$ voi olla mikä tahansa joukoista

$$\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

(Mistä tiedät, että tässä on varmasti kaikki osajoukot? Koska 3-joukon osajoukkojen lukumäärä on $2^3 = 8$!)
Muistetaan, että $|\bigcap_{i \in \emptyset} A_i| = |A|$. Siten

$$\begin{aligned} & |(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^C| = |A| + \sum_{I \subseteq [3], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} |\bigcap_{k \in I} A_k| \\ = \; & |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ = \; & 24 - 9 - 10 - 5 + 3 + 3 + 2 - 1 = 7. \end{aligned}$$

Siis yhteensä 7 opiskelijaa pystyi esittämään tekemänsä tehtävät assarille!

3. Olkoon D_n joukon $[n]$ kiintopisteettömien permutaatioiden, eli epäjärjestelyjen lukumäärä. Osoita kombinatorisella päättelyllä, että

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}),$$

kun $n \geq 2$.

[Ohje: jos $\pi : [n] \to [n]$ on epäjärjestely, niin on kaksi vaihtoehtoa. Joko $\pi(\pi(n)) = n$ tai $\pi(\pi(n)) \neq n$. Osoita, että ensin mainitun ehdon täyttäviä epäjärjestelyjä on $(n-1)D_{n-2}$ ja jälkimmäisen ehdon täyttäviä $(n-1)D_{n-1}$.]

Ratkaisu.
Olkoon $\pi : [n] \to [n]$ epäjärjestely. Oletetaan ensin, että $\pi(\pi(n)) = n$. $\pi(n)$ voi siis olla mikä tahansa alkio joukosta $\{1, 2, \dots, n-1\}$ ja epäjärjestely π kuvaa alkion $\pi(n)$ takaisin n:lle. Nyt π on (epäjärjestelty) bijektio $[2] \to [2]$, kun $[2] = \{n, \pi(n)\}$. Tällöin epäjärjestelyjä $[n] \to [n]$ on yhtä monta, kuin on $n-2$-joukon epäjärjestelyjä ($[n]$-joukosta pois alkiot n ja $\pi(n)$). Lisäksi alkiolle $\pi(n)$ on $n-1$ vaihtoehtoa, joten tuloperiaatteen mukaan tässä tapauksessa joukolla $[n]$ on siis $(n-1)D_{n-2}$ erilaista epäjärjestelyä.

Jos taas $\pi(\pi(n)) \neq n$, niin π voi kuvata alkion n mille tahansa alkioista $1, 2, \dots, n-1$. Nyt saadaan joukon $n-1$ epäjärjestely π' asettamalla $\pi'(i) = \pi(i)$, kun $i \neq \pi^{-1}(n)$ ja $\pi'(i) = \pi(n)$, kun $i = \pi^{-1}(n)$. Tässä siis "poistetaan" n.:s alkio joukosta. Jokainen joukon $[n-1]$ epäjärjestely (joita on D_{n-1} erilaista) saadaan näin $n-1$:llä tavalla $[n]$:n epäjärjestelystä. Tätä tapausta voidaan ajatella myös siten, että ensin on $n-1$-joukko, jolla epäjärjestelyjä siis D_{n-1} erilaista. Tämän jälkeen lisätään joukkoon n.:s alkio: se voidaan sijoittaa kuhunkin epäjärjestelyyn $n-1$ tavalla (alkioiden $\pi'(k)$ ja $\pi'(\pi'(k))$"väliin"). Tässä tapauksessa siis $(n-1)D_{n-1}$ erilaista epäjärjestelyä.

Summaperiaatteen nojalla $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$.

4. Pyöreän pöydän ympärillä on $n \geq 6$ tuolia. Kuinka monella tavalla näistä voi valita 4 tuolia niin, että mitkään kolme niistä eivät ole peräkkäin?

Ratkaisu.
I tapa:
Tehtävä voidaan ratkaista vähentämällä kaikista tavoista valita 4 tuolia ne tuoliryhmät, joissa kaikki 4 tuolia ovat peräkkäin sekä ne joissa on täsmälleen 3 tuolia peräkkäin.

Tuoliryhmiä, joissa kaikki ovat peräkkäin, on yhteensä n erilaista, sillä jokaista pöydän ympärillä olevaa tuolia kohden voidaan valita loput 3, jotka ovat täsmälleen valitusta tuolista seuraavat 3. Tuoliryhmiä, joissa on 3 (mutta ei 4) tuolia vierekkäin saadaan valitsemalla 3 peräkkäistä tuolia ja sitten 4. tuoli, joka ei ole kolmikon vieressä. Koska näitä 3 tuolin jonoja on n erilaista ja jokaiselle voidaan valita neljäs tuoli $n-5$ tuolin joukosta, niin ko. tuoliryhmiä on yhteensä $n(n-5)$ kpl.

Näin ollen tehtävän ratkaisu on

$$\binom{n}{4} - n - n(n-5) = \binom{n}{4} - n^2 + 4n.$$

II tapa:

Ratkaistaan tehtävä vielä harjoituksen vuoksi summa- ja erotusperiaatteen avulla.

Tarkastellaan ensin, kuinka monta tapaa on valita 4 tuolia n:n tuolin joukosta siten, että vähintään 3 näistä on peräkkäin. Merkitään S_i:llä niitä n-joukon 4-osajoukkoja (merkitään $[n]^{(4)}$) A jotka sisältävät tuolin i ($i = 1, 2, \dots, n$) ja kaksi siitä seuraavaa eli tuolit $\{i+1, i+2\}$. Siis

$$S_i = \big\{A \in [n]^{(4)} : \{i, i+1, i+2\} \subseteq A\big\}.$$

Tehtävässä täytyy määrittää niiden 4-osajoukkojen A lukumäärä, jotka eivät kuulu joukkoon S_i. Toisin sanoen lasketaan $|(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n)^C|$ summa- ja erotusperiaatteen

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^C| = \sum_{I \subset [n]} (-1)^{|I|} \Big| \bigcap_{k \in I} A_k \Big|$$

avulla. Jotta voimme käyttää summa- ja erotusperiaatteen kaavaa, niin täytyy tietää kaikkien leikkausten $|\bigcap_{i \in I, I \subseteq [n]} S_i|$ mahtavuudet.

Lasketaan ensin joukkojen S_i, $i = 1, 2, \dots, n$, mahtavuudet (vastaa kaavassa leikkauksia $\bigcap_{i \in I} S_i$, kaikilla I, joille $|I| = 1$. Esim. $I = \{1\}$, $I = \{2\}$ jne). Nyt $|S_i| = n - 3$ kaikilla $i = 1, 2, \dots, n$, sillä jokaista kiinnitettyä tuolikolmikkoa $\{i, i+1, i+2\}$ kohti voidaan 4.:s tuoli valita $n-3$ eri tavalla "vapaista" tuoleista. Koska indeksille i (toisin sanoen indeksijoukolle $I = \{i\}$) on n eri vaihtoehtoa, niin

$$\sum_{I \subseteq [n], |I| = 1} (-1)^1 |S_i| = -n(n-3).$$

Tarkastellaan sitten kahden alkion indeksijoukkoja $I = \{i, j\}$. Huomataan, että jos indeksit i, j ovat peräkkäin, ts. $i = j+1$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$, jolloin $S_j = \big\{A \in [n]^{(4)} : \{i+1, i+2, i+3\} \subseteq A\big\}$, niin

$$S_i \cap S_j = \{A \in [n]^{(4)} : \{i, i+1, i+2, i+3\} \subseteq A\}.$$

Toisin sanoen 4-osajoukko kuuluu sekä joukkoon S_i, että S_j, jos ja vain jos siihen sisältyy alkiot (=tuolit) $i, i+1, i+2, i+3$.

Nyt $|S_i \cap S_j| = 1$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$ ja indeksijoukkoja $\{i, i+1\}$ on yhteensä n erilaista (valittu i määrää myös indeksin j).

Olkoon sitten $I = \{i, j\}$ sellainen, että indeksit i, j eivät sijaitse peräkkäin (esimerkiksi $j = i+2$). Nyt kaikilla tällaisilla i, j on $S_i \cap S_j = \emptyset$, sillä 4-joukko ei voi sisältää viittä tai useampaa eri alkiota.

Siispä $\sum_{I \subseteq [n], |I|=2} (-1)^2 |\bigcap_{i \in I} S_i| = n$, kun $|I| = 2$.

Olkoon sitten $I = \{i, j, k\}$, siis $|I| = 3$. Nyt kaikilla $i < j < k$ on $S_i \cap S_j \cap S_k = \emptyset$, sillä ei löydy 4-osajoukkoja, jotka kuuluisivat kaikkiin joukkoihin S_i, S_j ja S_k (sama perustelu, kuin tapauksessa $I = \{i, j\}$, $j > i+1$). Samoin kaikilla I, joille $|I| \geq 4$.

4 tuolia voidaan valita n:n tuolin joukosta $\binom{n}{4}$ tavalla. Totesimme, että summa- ja erotusperiaatteessa summattavat termit ovat nollia lukuunottamatta tapauksia $|I| = 1$ ja $|I| = 2$, kun indeksit ovat peräkkäisiä.
Siis

$$\binom{n}{4} - n(n-3) + n = \binom{n}{4} - n^2 + 4n.$$

5. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n$ äärellisen joukon A osajoukkoja. Olkoon I indeksijoukon $[n]$ epätyhjä osajoukko. Olkoon B niiden pisteiden $a \in A$ joukko, joille $a \in A_i$, kun $i \in S$ ja $i \notin A_i$ kun $i \notin I$. Osoita, että

$$|B| = \sum_{I \subseteq J \subseteq [n]} (-1)^{|J \setminus I|} |\bigcap_{i \in J} A_i|.$$

Ratkaisu.
Merkitään $B \equiv B_I = \bigcap_{i \in I} A_i \setminus \bigcup_{i \notin I} A_i$. Koska mille tahansa joukoille A ja

B pätee, että $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ ja $i \notin I$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $i \in [n] \setminus I$, niin voidaan kirjoittaa

$$B_I = \bigcap_{i \in I} A_i \setminus \bigcup_{i \in [n] \setminus I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i \setminus \Big(\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{i \in [n] \setminus I} A_i \Big).$$

Nyt "perusjoukkona" on $A \equiv \bigcap_{i \in I} A_i$. Asetetaan $B_i = A_i \cap A$, kun $i \in [n] \setminus I \equiv K \supseteq J'$. Nyt siis $J' \cap I = \emptyset$ ja

$$|B_I| = \big| \big(\bigcup_{i \in K} B_i \big)^C \big| = \sum_{J' \subset K} (-1)^{|J'|} \big| \bigcap_{i \in J'} B_i \big| = (*).$$

Merkitään $J = J' \cup I$, josta $J' = J \setminus I$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$(*) = \sum_{J' \subset K} (-1)^{|J'|} \big| \bigcap_{i \in J' \cup I} A_i \big| = \sum_{I \subseteq J \subseteq [n]} (-1)^{|J \setminus I|} \big| \bigcap_{i \in J} A_i \big|.$$

(Huomaa, että koska $I \not\subseteq J' \subset K$, niin $J' \subset K$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $J = J' \cup I \subset K \cup I = [n]$.)